Bajery

1. Wykaż, że spośród n-kątów wpisanych w okrąg największe pole ma n-kąt foremny.

2. Wykaż, że spośród wszystkich czworokątów opisanych na danym okręgu najmniejszy obwód ma kwadrat.

3. *(Punkt Toricelliego)* Wykaż, że w trójkącie ostrokątnym z punktu o najmniejszej sumie odległości od wierzchołkow widać każdy z boków pod kątem $120°$.

4. Niech P będzie punktem we wnętrzu czworościanu foremnego $ABCD$ o boku 1. Udowodnij, że $|PA| + |PB| + |PC| + |PD| \leqslant 3$.

5. Wykaż, że dla $x, y, z \in \mathbb{Z}$ równanie $(x^2 + 1)(y^2 + 1) = (z^2 + 1)$ na nieskończenie wiele rozwiązań.

6. Rozstrzygnij, czy w zbiorze liczb postaci $2x^2 + 2x + 1$, gdzie $x \in \mathbb{N}$ istnieje nieskończenie wiele kwadratów liczb naturalnych.

7. Wyznacz wszystkie ciągi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ minimalnej długości takie, że $\sum_{i=1}^{n} a_i = 25$, $\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 = 33$, $\sum_{i=1}^{n}(a_i)^3 = 49$ oraz $\sum_{i=1}^{n}(a_i)^4 = 81$.

8. Rozwiąż układ równań w liczbach rzeczywistych $a, b, c, d, e \leqslant 3$

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 39 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 57 \end{cases}$$

9. Wykaż, że dla dowolnego $\varepsilon > 0$ istnieją takie liczby całkowite dodatnie x i y, że

$$y^3 < x^2 < y^3 + \varepsilon y.$$