....
imie i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na IV Warsztaty Matematyczne

Klasa druga i czwarta

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Onufry i Joasia mają po symetrycznej monecie. Onufry rzuca nią 64 razy, a Joasia 65 razy. Szansa, że

☐ Onufry wyrzuci nie więcej niż 16 orłów jest mniejsza niż 25%.
☐ Onufry wyrzuci mniej orłów niż Joasia jest większa niż 50%.
☐ Onufry wyrzuci dokładnie 63 orły jest większa niż że Joasia wyrzuci dokładnie 64 reszki.

2*. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Rozważmy wielomian $W(x) = (x^2 - x - 1)^n$.

☐ Suma współczynników wielomianu W jest zawsze nieujemna.
☐ Suma współczynników przy nieparzystych potęgach wielomianu W jest zawsze niedodatnia.
☐ Współczynnik przy x^{2n-1} jest nie większy od 1.

3. Dany trójkąt ABC. Szukamy takich punktów D, E, F na odpowiednio bokach BC, CA, AB, że $DC = CE$, $DB = BF$ i $EA = FA$.

☐ Takie punkty D, E, F zawsze istnieją.
☐ Jeśli punkty D, E, F istnieją, to są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC.
☐ Jeśli punkty D, E, F istnieją, to trójkąt DEF jest podobny do trójkąta ABC.

4*. W trójkącie ABC odcinki AD, BE i CF są środkowymi. Niech $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|AD| = d$, $|BE| = e$, $|CF| = f$, $2p = a + b + c$, $s = d + e + f$.

☐ $s = p\sqrt{3}$.
☐ $s > p$.
☐ $s \leqslant 2p$.

5. W pierwszych klasach w Staszicu można odrabiać prace domowe z chemii, geografii i biologii. Tylko chemię odrabia 29 uczniów, tylko biologię 58, zaś tylko geografię 73. Uczniów odrabiających zarówno chemię jak i biologię jest 15 (część z nich może odrabiać też geografię), biologię i geografię 20, geografię i chemię 17.

☐ Jest możliwe, że dokładnie 110 osób odrabia geografię.
☐ Jest możliwe, że biologię odrabia 95 osób.
☐ Na pewno chemię odrabia przynajmniej 46 osób.

6. Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Punkty F i G są takie, że trójkąty ABF i CDG są równoboczne oraz punkt F leży wewnątrz pięciokąta $ABCDE$, a G na zewnątrz.

☐ Kąt CFD wynosi $82°$.
☐ Kąt FCD wynosi $44°$.
☐ Kąt BGC wynosi $6°$.

7. Prawdopodobieństwo znalezienia wśród 400 kandydatów do szkoły dwudziestu urodzonych tego samego dnia tygodnia jest

☐ równe $\frac{7}{20}$.
☐ równe 1.
☐ równe $\frac{1}{7}$.

8. Niech $P(n) = 2^n + 3^n$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

☐ $7|P(543)$.
☐ Istnieje takie $n > 1$, że $n|P(n)$.
☐ Istnieje takie n, że $7|(P(n) - 1)(P(n) - 3)$.

9. Onufry i Joasia grają w następującą grę: na stole leżą 102103 cukierki. Grę rozpoczyna Joasia, ruchy wykonują na przemian. Ruch polega na zdjęciu ze stosu 34, 51 lub 68 cukierków. Grę wygrywa gracz, który pozostawi na stole dokładnie k cukierków. Remis następuje, gdy któryś gracz nie może wykonać ruchu. Onufry może wygrać grę, niezależnie od ruchów Joasi, jeśli:

☐ $k = 0$.
☐ $k = 1$.
☐ $k = 52$.

10. Płaszczyzna *dobrze dzieląca* bryłę to taka, która dzieli ją na dwie przystające bryły.

☐ Czworościan foremny ma dokładnie 10 płaszczyzn *dobrze dzielących.*
☐ Dwudziestościan foremny ma mniej niż 2003 płaszczyzny *dobrze dzielące.*
☐ Ostrosłup prawidłowy 2003-kątny ma dokładnie 2003 płaszczyzny *dobrze dzielące.*

11. Niech $f_n : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ i $f_n(x) = x^n + n$ dla liczb całkowitych n.

☐ f_n może mieć miejsca zerowe tylko jeśli $n < 0$.
☐ Istnieje takie całkowite n i rzeczywiste $x \neq 0$, że $f_n(x) + f_{-n}(x) = \frac{3}{2}$.
☐ Dla każdego całkowitego n i rzeczywistego $x \neq 0$ zachodzi nierówność $f_n^2(x) + f_{-n}^2(x) \geqslant f_n(x) + f_{-n}(x)$.

12. Skoczek szachowy na szachownicy $n \times n$ może obejść wszystkie pola szachownicy będąc na każdym dokladnie raz i wrócić do pola z którego zaczynał jeśli:

☐ $n = 3$.
☐ $n = 5$.
☐ $n = 81$.

13. Dziadek napisał w rządku 2003 liczby. Babcia zauważyła, że każde cztery kolejne liczby w rządku Dziadka dają tę samą sumę. Wnuczek zdradził nam, że pierwszą liczbą z rządku jest 7, pięćdziesiątą pierwszą 4, czwartą zaś 23.

☐ Możliwe jest, że setną liczbą jest 13.
☐ 1001-ą liczbą musi być 6.
☐ Liczbą na pozycji 2002 musi być 23.

14. Przecinając dwudziestościan foremny płaszczyzną w przekroju można otrzymać:

☐ pięciokąt foremny.
☐ dziewięciokąt o równych bokach.
☐ dziesięciokąt foremny.

15*. W trójkącie ostrokątnym ABC, jeśli następujące punkty istnieją, to się pokrywają:

☐ ortocentrum i punkt o najmniejszej sumie odległości od wierzchołków i boków.
☐ środek ciężkości i punkt o najmniejszej sumie odległości od boków.
☐ środek okręgu opisanego i punkt o najmniejszej sumie odległości od wierzchołków.

16. Funkcja $f(x) = x^2$ jest jedyną funkcją spośród funkcji prowadzących z rzeczywistych w rzeczywiste spełniającą dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$ równanie:

☐ $(f(x) + f(y))^2 = f(x^2 + y^2)$.
☐ $f(x + y) = f(x) + f(y) + 2xy$.
☐ $f^2(x + 1) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 1$.

17. Dla dowolnej funkcji $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja

☐ $g(x) = f(x^4)$ jest parzysta.
☐ $h(x) = f^4(x)$ jest parzysta.
☐ $i(x) = f(x^3)$ jest nieparzysta.

18. Dane są liczby całkowite dodatnie k i l i szachownica $n \times n$. Ruch *superskoczka* polega na przesunięciu się o k pól w jednym z kierunków równoległych do krawędzi pól i o l w kierunku prostopadłym do poprzednio wybranego kierunku. *Superskoczek* może, będąc na dowolnym polu, dojść na dowolne inne, jeśli:

☐ $n = 2003$, $k = 84$, $l = 343$.
☐ $n = 2003$, $k = 1117$, $l = 1119$.
☐ $n = 2003$, $k = 1234$, $l = 17$.

19*. Prostopadłościan $ABCDEFGH$, w którym krawędziami bocznymi są AE i BF, ma krawędzie boczne i przekątne główne o długościach będących liczbami całkowitymi.

☐ Krawędzie boczne mogą mieć wszystkie długości nieparzyste.
☐ Możliwe jest, że odcinki AB, BC i AC mają długości będące kwadratami liczb całkowitych.
☐ Możliwe jest, że $AB = BC$.

20. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest parzysta.

☐ Funkcja $h(x) = f^2(x)$ jest parzysta.
☐ Funkcja $i(x) = f(g(x))$ jest parzysta.
☐ Funkcja $j(x) = (f(x) + g(x))^2$ jest parzysta.

21*. Dla każdych liczb całkowitych dodatnich $n > 2$ i $1 < k < n$ zachodzi

☐ $n | k\binom{n}{k}$.
☐ $n(n-1) | k\binom{n}{k}$.
☐ $n | \binom{n}{k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.

22. Dany jest trójkąt rozwartokątny o bokach a, b, c. Jest możliwe, by:

☐ $ca + bc = c^2$.
☐ $a^3 + b^3 = c^3$.
☐ $a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}} = c^{\frac{3}{2}}$.

23. Niech n będzie liczbą całkowitą dodatnią. Niech $P(x) = (2 - x)^n$, $Q(x) = (x + 2)^n$, $W(x) = P(x) + Q(x)$, $T(x) = P(x) - Q(x)$.

☐ Suma współczynników przy nieparzystych potęgach wielomianu W może być dodatnia.
☐ Współczynnik przy x^{24} wielomianu T może być ujemny.
☐ Wielomian W jest parzysty.

24. Liczba $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 9^9$ ma

☐ 4 dzielniki złożone.
☐ 3168 dzielników złożonych.
☐ 5754 dzielniki złożone.

25*. Suma kwadratów dwóch różnych liczb pierwszych

☐ może dzielić się przez którąś z tych liczb.
☐ może dzielić się przez 3.
☐ może dzielić się przez 5.

26. Dane są ciągi arytmetyczne $1, 5, 9, \ldots$ oraz $7, 12, 17, \ldots$. Wówczas

☐ żadna liczba naturalna nie występuje jednocześnie w obu ciągach.
☐ istnieje liczba większa od 2000, która występuje w obu ciągach.
☐ liczba 1997 występuje w obu ciągach.

27. Suma $\sum_{i=1}^{n} i^5$ jest równa

☐ $\frac{1}{6}(n+1)^6 - \frac{1}{2}(n+1)^5 + \frac{5}{12}(n+1)^4 - \frac{1}{12}(n+1)^2$.
☐ $\sum_{i=n}^{2n}(i-n)^5$.
☐ $4n^5 - \frac{115}{4}n^4 + \frac{245}{2}n^3 - \frac{1083}{4}n^2 + 294n - 120$.

28. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, w którym odcinki AE i BF są krawędziami.

☐ Bryła $ACFH$ jest czworościanem foremnym.
☐ Objętość bryły $BDEG$ jest czterokrotnie mniejsza od objętości sześcianu $ABCDEFGH$.
☐ Proste AG i BH są prostopadłe.

29*. Równania $ax^2 + bx + c$ oraz $dx^2 + ex + f$ mają te same dwa pierwiastki. Z tego wynika, że

☐ $a = d$.
☐ $ae = bd$.
☐ $c + f = 0$.

30. Funkcja $f(x) = \sin(\cos x)$ dla wszystkich rzeczywistych x

☐ ma największą wartość równą 1.
☐ jest okresowa.
☐ przyjmuje wartość 0 nieskończenie wiele razy.