....
imië i nazwisko *klasa* *nr telefonu*

Test kwalifikacyjny na IV Warsztaty Matematyczne

Klasa pierwsza

Na pytania odpowiada się „tak” lub „nie” poprzez wpisanie odpowiednio „**T**” bądź „**N**” w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak” i „nie”. W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1*. Nierówność $a^5 > a^7$ jest prawdziwa dla

☐ $a < 0$.
☐ $0 < a < 1$.
☐ $a < -1$.

2. W pierwszych klasach w Staszicu można odrabiać prace domowe z chemii, geografii i biologii. Tylko chemię odrabia 29 uczniów, tylko biologię 58, zaś tylko geografię 73. Uczniów odrabiających zarówno chemię jak i biologię jest 15 (część z nich może odrabiać też geografię), biologię i geografię 20, geografię i chemię 17.

☐ Jest możliwe, że dokładnie 110 osób odrabia geografię.
☐ Jest możliwe, że biologię odrabia 95 osób.
☐ Na pewno chemię odrabia przynajmniej 46 osób.

3*. Dany jest pięciokąt foremny $ABCDE$. Punkty F i G są takie, że trójkąty ABF i CDG są równoboczne oraz punkt F leży wewnątrz pięciokąta $ABCDE$, a G na zewnątrz.

☐ Kąt CDF wynosi $82°$.
☐ Kąt FDC wynosi $44°$.
☐ Kąt BGC wynosi $6°$.

4. Onufry ma w szufladzie 15 czerwonych skarpetek, 19 żółtych i 13 w kolorze kawa z mlekiem. Onufry jest śpiący i nie patrzy jakie skarpetki wyciąga z szuflady.

☐ Onufry na pewno będzie miał parę skarpetek jednego koloru jak wyciągnie 5 skarpetek.
☐ Onufry na pewno będzie miał parę skarpetek w kolorze kawa z mlekiem jeśli wyciągnie 35 skarpetek.
☐ Szansa że pierwsze dwie skarpetki wyciągnięte przez Onufrego będą tego samego koloru jest większa od 50%.

5. Szachownica $n \times n$ pomalowana tradycyjnie ma tyle samo pól czarnych i białych

☐ zawsze.
☐ gdy $n = 421$.
☐ gdy $n = 2578$.

6. Niech $P(n) = 2^n + 3^n$ dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n.

☐ $7|P(543)$.
☐ Istnieje takie $n > 1$, że $n|P(n)$.
☐ Istnieje takie n, że $7|(P(n) - 1)(P(n) - 3)$.

7. Dane są punkty A, B, C, D, E, F, przy czym $|AB| = 21$, $|BC| = 68$, $|BD| = 51$, $|CD| = 85$, $|AE| = 201$, $|EF| = 11$, $|AF| = 191$, $|CF| = 102$. Wówczas:

☐ $|AC| > 87$.
☐ $|AD| > |DC|$.
☐ $|\measuredangle AFE| > 90°$.

8. Liczbę 1234567890 można przedstawić jako:

☐ sumę dziewięciu kolejnych liczb naturalnych.
☐ sumę pięciu kolejnych liczb naturalnych.
☐ sumę dwóch kolejnych liczb naturalnych.

9. Suma dwóch liczb pierwszych

- [ ] dzieli się przez 3.
- [ ] może być liczbą pierwszą.
- [ ] musi być liczbą pierwszą.

10*. Dziadek napisał w rządku 2003 liczby. Babcia zauważyła, że każde cztery kolejne liczby w rządku Dziadka dają tę samą sumę. Wnuczek zdradził nam, że pierwszą liczbą z rządku jest 7, pięćdziesiątą pierwszą 4, czwartą zaś 23.

- [ ] Możliwe jest, że setną liczbą jest 13.
- [ ] 1001-ą liczbą musi być 6.
- [ ] Liczbą na pozycji 2002 musi być 23.

11. Skoczek szachowy na szachownicy $n \times n$ może obejść wszystkie pola szachownicy będąc na każdym dokladnie raz i wrócić do pola z którego zaczynał jeśli:

- [ ] $n = 3$.
- [ ] $n = 5$.
- [ ] $n = 81$.

12. Dane są ciągi arytmetyczne $1, 5, 9, \ldots$ oraz $7, 12, 17, \ldots$.

- [ ] Żadna liczba naturalna nie występuje jednocześnie w obu ciągach.
- [ ] Istnieje liczba większa od 2000, która występuje w obu ciągach.
- [ ] Liczba 1997 występuje w obu ciągach.

13*. Z faktu, że liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b < c$ wynika, że

- [ ] $a^2 + b^2 < c^2$.
- [ ] istnieje trójkąt o bokach a, b, c.
- [ ] $ab < c$.

14. Funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest nieparzysta, a $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest parzysta.

☐ Funkcja $h(x) = f^2(x)$ jest parzysta.
☐ Funkcja $i(x) = f(g(x))$ jest parzysta.
☐ Funkcja $j(x) = (f(x) + g(x))^2$ jest parzysta.

15. Onufry i Joasia grają w następującą grę: na stole leżą 102103 cukierki. Grę rozpoczyna Joasia, ruchy wykonują na przemian. Ruch polega na zdjęciu ze stosu 34, 51 lub 68 cukierków. Grę wygrywa gracz, który pozostawi na stole dokładnie k cukierków. Remis następuje, gdy któryś gracz nie może wykonać ruchu. Onufry może wygrać grę, niezależnie od ruchów Joasi, jeśli:

☐ $k = 0$.
☐ $k = 1$.
☐ $k = 52$.

16. Dany trójkąt ABC. Szukamy takich punktów D, E, F na odpowiednio bokach BC, CA, AB, że $|DC| = |CE|$, $|DB| = |BF|$ i $|EA| = |FA|$.

☐ Takie punkty D, E, F zawsze istnieją.
☐ Jeśli punkty D, E, F istnieją, to są punktami styczności okręgu wpisanego w trójkąt ABC.
☐ Jeśli punkty D, E, F istnieją, to trójkąt DEF jest podobny do trójkąta ABC.

17. Liczba $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot 7^7 \cdot 9^9$ ma

☐ 4 dzielniki złożone.
☐ 3168 dzielników złożonych.
☐ 5754 dzielników złożonych.

18. Dane są liczby całkowite dodatnie k i l i szachownica $n \times n$. Ruch *superskoczka* polega na przesunięciu się o k pól w jednym z kierunków równoległych do krawędzi pól i o l w kierunku prostopadłym do poprzednio wybranego kierunku. *Superskoczek* może, będąc na dowolnym polu, dojść na dowolne inne, jeśli:

☐ $n = 2003$, $k = 84$, $l = 343$.
☐ $n = 2003$, $k = 1117$, $l = 1119$.
☐ $n = 2003$, $k = 1234$, $l = 17$.

19. Prawdopodobieństwo znalezienia wśród 400 kandydatów do szkoły dwudziestu urodzonych tego samego dnia tygodnia jest

☐ równe $\frac{7}{20}$.
☐ równe 1.
☐ równe $\frac{1}{7}$.

20. Czworokąt może mieć

☐ same kąty rozwarte.
☐ same kąty ostre.
☐ kąt wklęsły i dwa kąty rozwarte.

21. Dane jest 8 parami różnych liczb naturalnych. Wówczas wśród nich istnieją takie dwie, których

- [ ] suma jest podzielna przez 7.
- [ ] różnica jest podzielna przez 7.
- [ ] iloczyn jest podzielny przez 7.

22*. Równość $|a_1 + \ldots + a_n| = |a_1| + \ldots + |a_n|$, gdzie a_n są liczbami rzeczywistymi, jest prawdziwa

- [ ] dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$.
- [ ] wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $a_1, \ldots, a_n$ są nieujemne.
- [ ] jeśli wszystkie spośród liczb $a_1, \ldots, a_n$ są ujemne.

23. W trójkącie ABC odcinki AD, BE i CF są środkowymi. Niech $|BC| = a$, $|AC| = b$, $|AB| = c$, $|AD| = d$, $|BE| = e$, $|CF| = f$, $2p = a + b + c$, $s = d + e + f$.

- [ ] $s = p\sqrt{3}$.
- [ ] $s > p$.
- [ ] $s \leqslant 2p$.

24. Można podzielić

- [ ] sześciokąt foremny na 8 przystających trapezów.
- [ ] kwadrat na pięć przystających czworokątów.
- [ ] kwadrat na 2004 pięciokątów o równych polach.

25. Dany jest sześcian $ABCDEFGH$, w którym odcinki AE i BF są krawędziami.

- [ ] Bryła $ACFH$ jest czworościanem foremnym.
- [ ] Objętość bryły $BDEG$ jest czterokrotnie mniejsza od objętości sześcianu $ABCDEFGH$.
- [ ] Proste AG i BH są prostopadłe.

26. W sześciokącie wypukłym, w którym żadne trzy przekątne nie przecinają się w jednym punkcie

- [ ] jest 15 przekątnych.
- [ ] jest 15 przecięć przekątnych (poza wierzchołkami).
- [ ] jest 20 przecięć przekątnych (poza wierzchołkami).

27*. Liczba $(2002-1)\cdot(2000-2)\cdot(1998-3)\cdot\ldots\cdot(-2000-2002)\cdot(-2002-2003)$

☐ jest kwadratem liczby całkowitej.
☐ jest podzielna przez 7.
☐ ma ostatnią cyfrę 4.

28. Dla dowolnej funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funkcja

☐ $g(x)=f(x^4)$ jest parzysta.
☐ $h(x)=f^4(x)$ jest parzysta.
☐ $i(x)=f(x^3)$ jest nieparzysta.

29. Okrąg z powierzchnią czworościanu (ściany i krawędzie) może mieć

☐ dokładnie 6 punktów wspólnych.
☐ dokładnie 8 punktów wspólnych.
☐ dokładnie 10 punktów wspólnych.

30*. Na tym teście, pisząc odpowiedzi na każde pytanie i nie pisząc uzasadnień, można uzyskać

☐ 1 punkt.
☐ -100 punktów.
☐ 148 punktów.