Trzecie zawody indywidualne

grupa młodsza

środa, 25 września 2002

61. Okręgi S i T przecinają się w punktach M i N. Niech k będzie wspólną styczną tych dwóch okręgów, przy czym punkt M leży bliżej prostej k niż punkt N. P i Q są punktami styczności prostej k odpowiednio z okręgami S i T. Prosta PN przecina okrąg T w punktach N i R. Udowodnij, że dwusieczna kąta $\angle PMR$ jest zawarta w prostej MQ.

62. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to:

$$a^3b + b^3c + c^3a \geqslant a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

63. W pewnym państwie istnieje n miast i każde dwa łączy droga jednokierunkowa. Udowodnij, że istnieje miasto, z którego da się dojechać do każdego innego (niekoniecznie bezpośrednio).

64. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_7$ będą liczbami całkowitymi, zaś $b_1, b_2, \ldots, b_7$ pewną ich permutacją (tymi samymi liczbami ustawionymi niekoniecznie w tej samej kolejności). Udowodnij, że $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)\ldots(a_6 - b_6)(a_7 - b_7)$ jest liczbą parzystą.

65. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n), że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej k ciąg (b_n) zdefiniowany następująco: $b_n = k + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ zawiera skończoną liczbę wyrazów będących liczbami pierwszymi.

Trzecie zawody indywidualne

grupa starsza

środa, 25 września 2002

65. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n), że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej k ciąg (b_n) zdefiniowany następująco: $b_n = k + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ zawiera skończoną liczbę wyrazów będących liczbami pierwszymi.

66. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma ścianę trójkątną lub kąt trójścienny.

67. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$4abc - a^4 - b^4 - c^4 \leqslant 1.$$

68. W pewnym języku są tylko dwie litery: A i B. Słowa z tego języka spełniają następujące warunki:

(a) Jedynym słowem o długości 1 jest A.

(b) Dowolna grupa liter $X_1X_2\ldots X_nX_{n+1}$ (gdzie $X_i \in \{A, B\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$) tworzy słowo długości $n+1$, gdy zawiera choć jedną literę A i przy tym nie jest postaci $X_1X_2\ldots X_nA$, gdzie $X_1X_2\ldots X_n$ jest słowem długości n.

Znajdź jawny wzór na liczbę słów długości n.

69. Na płaszczyźnie rozmieszczono nieskończenie wiele modliszek w taki sposób, by odległość między żadnymi dwiema nie była mniejsza niż 2 metry. Zakładamy, że modliszka porusza się z prędkością nie większą niż 10 metrów na minutę oraz że moze zabić inną tylko wtedy, gdy znajdują się w jednym punkcie. Ponadto owad umiera z rozpaczy natychmiast, gdy tylko upłynie minuta od chwili, gdy po raz ostatni zamordował współplemieńca. Udowodnij, że po kwadransie żadna modliszka nie ostanie się przy życiu.

610. W trójkącie ABC zachodzi $AB > AC$. Dwusieczna wewnętrzna kąta przy wierzchołku A przecina bok BC w punkcie D. E jest takim punktem na AB, że kąt $\measuredangle EDB$ jest prosty. F jest takim punktem na AC, że kąty $\measuredangle BED$ i $\measuredangle DEF$ są przystające. Udowodnij, że wówczas również kąty $\measuredangle BAD$ i $\measuredangle FDC$ są przystające.

Trzecie zawody indywidualne

grupa najstarsza

środa, 25 września 2002

68. W pewnym języku są tylko dwie litery A i B. Słowa z tego języka spełniają następujące warunki:

(a) Jedynym słowem o długości 1 jest A.

(b) Dowolna grupa liter $X_1X_2 \ldots X_nX_{n+1}$ (gdzie $X_i \in \{A, B\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$) tworzy słowo długości $n + 1$, gdy zawiera choć jedną literę A i przy tym nie jest postaci $X_1X_2 \ldots X_nA$, gdzie $X_1X_2 \ldots X_n$ jest słowem długości n.

Znajdź jawny wzór na liczbę słów długości n.

69. Na płaszczyźnie rozmieszczono nieskończenie wiele modliszek w taki sposób, by odległość między żadnymi dwiema nie była mniejsza niż 2 metry. Zakładamy, że modliszka porusza się z prędkością nie większą niż 10 metrów na minutę oraz że moze zabić inną tylko wtedy, gdy znajdują się w jednym punkcie. Ponadto owad umiera z rozpaczy natychmiast, gdy tylko upłynie minuta od chwili, gdy po raz ostatni zamordował współplemieńca. Udowodnij, że po kwadransie żadna modliszka nie ostanie się przy życiu.

610. W trójkącie ABC zachodzi $AB > AC$. Dwusieczna wewnętrzna kąta przy wierzchołku A przecina bok BC w punkcie D. E jest takim punktem na AB, że kąt $\measuredangle EDB$ jest prosty. F jest takim punktem na AC, że kąty $\measuredangle BED$ i $\measuredangle DEF$ są przystające. Udowodnij, że wówczas również kąty $\measuredangle BAD$ i $\measuredangle FDC$ są przystające.

611. Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny (x, y) o obu współrzędnych całkowitych. Drogą długości n nazywamy dowolny ciąg $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ punktów należących do X takich, że $|P_iP_{i-1}| = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Niech $F(n)$ będzie liczbą różnych dróg $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ o początku $P_0 = (0, 0)$ i końcu P_n należącym do prostej $y = 0$. Udowodnij, że $F(n) = \binom{2n}{n}$.

612. Pewnego dnia Karolek siedział sobie przed domem i rozmyślał. Nagle zobaczył na niebie n bocianów. Bystry umysł Karolka natychmiast pozwolił mu spostrzec, że może tak przestawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby n, by po dodaniu tak otrzymanej liczby do n otrzymać liczbę 10^{100}. Udowodnij, że ostatnią cyfrą otrzymanej w wyniku przestawienia cyfr liczby było 0.

613. Okrąg O jest styczny do dwóch równoległych prostych l_1 i l_2. Okrąg O_1 jest styczny do prostej l_1 w punkcie A i zewnętrznie do okręgu O w punkcie C. Okrąg O_2 jest styczny do prostej l_2 w punkcie B, zewnętrznie do okręgu O w punkcie D oraz zewnętrznie do okręgu O_1 w punkcie E. Proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDE.