Parę zadań troszkę trudniejszych od pozostałych

1. Znajdź wszystkie funkcje $f : R \to R$ spełniające dla każdych x, y, z, t rzeczywistych następujące równanie:
$(f(x) + f(z))(f(y) + f(t)) = f(xy - zt) + f(xt + yz)$.

2. Różne gatunki pcheł naukowcy oznaczają różnymi liczbami dodatnimi rzeczywistymi, które to określają zdolność pcheł do skoku. Pchły zawsze skaczą jedna przez drugą i jeśli pchły z gatunku α są w punktach A i B i pchła z A skacze przez pchłę z B, to ląduje ona w puncie C takim, że B należy do odcinka AC i $\alpha \cdot AB = BC$. Na początku jest $n > 1$ pcheł na prostej k. Dla jakiej stałej gatunku α mogą one dojść dowolnie daleko skacząc tylko w jedną stronę prostej?

3. Rozważmy nieskończoną szachownicę, a na niej trójkąty prostokątne o przyprostokątnych długości całkowitej (kratka ma długość boku 1) i zawierających się w prostych dzielących kratki. Dla prostokątnego trójkąta o przyprostokątnych długości m i n niech $f(m, n)$ będzie modułem różnicy między polem białej i czarnej części prostokąta.

(a) Policz $f(m, n)$ dla m, n takich że $2|m - n$.

(b) Udowodnij, że $f(m, n) \leqslant \frac{1}{2} max(m, n)$.

(c) Udowodnij, że $f(m, n)$ nie jest ograniczone z góry.

4. W przestrzeni trójwymiarowej pomalowano 2000 punktów kratowych na czerwono i inne 2000 na niebiesko tak, że żaden dwa takie odcinki, że jeden koniec odcina jest punktem czerwonym, a drugi niebieskim, nie mają punktów wspólnych poza ewentualnymi wierzchołkami. Udowodnij, że dla każdego prostopadłościanu o wierzchołkach w punktach kratowych i krawędziach równoległych do osi układu współrzędnych, zawierającego wszystkie pomalowane punkty, objętość tego prostopadłościanu jest co najmniej 500000.

5. Rozważmy szachownicę o bokach m i n. Na każdym polu szachownicy leży karteczka. Karteczka jest z jednej strony biała, a z drugiej czarna. Na początku wszystkie kartki są białe na górze, tylko jedna w rogu jest czarna na górze. Ruch polega na usunięciu dowolnej czarnej kartki i odwróceniu wszystkich niezdjętych jej sąsiadów po boku. Dla jakich m i n da się opróżnić szachownicę?

6. Dwusieczne wewnętrzne kątów A, B i C trójkąta ABC przecinają okrąg opisany na nim w K, L i M odpowiednio. Niech R będzie punktem wewnętrznym boku AB. Punkty P i Q są określone następująco: $RP||AK$, $RQ||BL$, BP jest prostopadłe do BL i AQ jest prostopadłe do AK. Udowodnij, że proste KP, LQ, MR się przecinają w jednym punkcie.

7. Niech trójkąt ostrokątny ABC ma ortocentrum w H i środek okręgu opisanego w O, zaś spodkiem wysokości BH niech będzie E. Niech punkt P będzie dowolnym punktem na łuku BC nie zawierającym A. Niech Q i R będą takimi punktami, że czworokąty $PAQB$ i $PARC$ są równoległobokami. Proste HR i AQ przecinają się w X. Udowodnij, że proste AP i EX są równoległe.

8. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem boku AB i punkt E dzieli bok BC w stosunku $2 : 1$. Znajdź miarę kąta $\measuredangle BAC$, jeśli kąty $\measuredangle ADC$ i $\measuredangle BAE$ są przystające.

9. Na bokach AB i CD czworokąta $ABCD$ wpisanego w okrąg obrano punkty E i F takie, że $\frac{AE}{BE} = \frac{CF}{DF}$. Na odcinku EF obrano taki punkt P, że $\frac{EP}{FP} = \frac{AB}{CD}$. Udowodnij, że stosunek pól trójkątów ADP i BCP nie zależy od wyboru punktów E i F.

10. Niech $d(n)$ oznacza liczbę dodatnich dzielników liczby n. Czy istnieje takie naturalne $n > 1$, że równanie $a^b = b^{na}$ spełnia co najmniej $d(n) + 2000$ różnych par liczb całkowitych dodatnich (a, b)?