Seria łatwych teorioliczbowych zadań

kiedyśtam, któryś września 2002

TL1. Rozwiąż w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z równanie:

$$105^x + 211^y = 106^z.$$

TL2. Udowodnij, że jeśli $p_1, p_2, \ldots, p_n$ są ciągiem pierwszych $n > 1$ liczb pierwszych, to $p_1 p_2 \ldots p_n \pm 1$ nie może być kwadratem liczby całkowitej.

TL3. Wyznacz wszystkie liczby całkowitej dodatnie n, dla których k jest kwadratem liczby całkowitej, jeśli:

(a) $k = 2^n + 8n + 5$

(b) $k = 2^n + 3^n + 4^n$

(c) $k = 6^n 5^n$

(d) $k = 7^n 5^n$

(e) $k = 2^n + 65$

(f) $k = 3^n + 55$

TL4. Sześć liczb pierwszych jest kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego. Udowodnij, że różnica tego ciągu jest nie mniejsza od 30.

TL5. Rozwiąż w liczbach całkowitych x, y równanie $x^3 - y^3 = 91$.

TL6. Znajdź wszystkie pary liczb pierwszych p, q dla których $p^2 - p + 1 = q^3$.

TL7. Rozwiąż w liczbach całkowitych dodatnich x, y, z równanie $xy + yz + zx = xyz + 2$.

TL8. Niech $S(n)$ będzie sumą cyfr w zapisie dziesiętnym liczby n. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich n, dla których:

(a) $S(3^n) \geqslant S(3^{n+1})$

(b) $S(2^n) > S(2^{n+1})$

TL9. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej M istnieje licza całkowita N taka, że $S(2^N) > M$.

TL10. Udowodnij, że równanie $x^3 + y^3 + z^3 = 2$ ma nieskończenie wiele rozwiązań w liczbach całkowitych x, y, z.

TL11. Niech $D(n)$ oznacza największą wspólną iwelokrotność liczb $n, n+1, \ldots, n+1989$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich, dla których $D(n) > D(n+1)$.

TL12. Udowodnij, że jeśli m i n są liczbami całkowitymi dodatnimi i $\frac{m}{n} < \sqrt{2}$, to $\frac{m}{n} < \sqrt{2}(1 - \frac{1}{4n^2})$.

TL13. Udowodnij, że jeśli $a > 1$ i m są liczbami całkowitymi dodatnimi, to

$$NWD(\frac{a^m - 1}{a - 1}, a - 1) = NWD(a - 1, m).$$

TL14. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n w przedziale $[n, 2n]$ leży liczba całkowite dodatnia, która jest iloczynem dwóch liczb pierwszych.