Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa młodsza

wtorek, 24 września 2002

51. Dane są liczby całkowite dodatnie n i $k > \frac{n+1}{2}$ oraz k-elementowy zbiór liczb całkowitych dodatnich nie większych niż n. Udowodnij, że można z tego zbioru wybrać takie trzy niekoniecznie różne liczby x, y, z, że $x + y = z$.

52. Dany jest okrąg O oraz dwa różne punkty A i B. Skonstruuj okrąg przechodzący przez punkty A i B, styczny do okręgu O.

53. Udowodnij, że prostokąt o wymiarach $a \times b$ można pokryć prostokątami o wymiarach $n \times 1$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|a$ lub $n|b$.

54. Udowodnij, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i $|W(3)| = |W(7)| = 1$, to $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa starsza

wtorek, 24 września 2002

54. Udowodnij, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i $|W(3)| = |W(7)| = 1$, to $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

55. Wielokąt wypukły G zawarty jest we wnętrzu wielokąta wypukłego F. Rozstrzygnij, czy obwód wielokąta G może być większy od obwodu wielokąta F.

56. Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś D, E, F niech będą punktami przecięcia dwusiecznych kątów A, B, C trójkąta ABC odpowiednio z bokami BC, AC i AB. Udowodnij, że

$$\frac{AI}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} \cdot \frac{CI}{CF} \leqslant \frac{8}{27}.$$

57. Z szachownicy 13×13 wycięto środkowe pole. Czy otrzymaną figurę da się pokryć klockami 4×1?

58. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że równanie

$$a^5 + b^6 + c^7 + d^8 + e^9 + f^{10} + g^{11} + h^{12} = n$$

ma co najmniej 2002002 rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h.

59. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2} = \frac{n}{2}.$$

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa najstarsza

wtorek, 24 września 2002

58. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że równanie

$$a^5 + b^6 + c^7 + d^8 + e^9 + f^{10} + g^{11} + h^{12} = n$$

ma co najmniej 2002002 rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h.

59. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatnej n oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2}.$$

510. Dany jest wielomian stopnia 2001 o współczynnikach rzeczywistych, o następującej własności:

$$P(k) = \frac{2002k}{2002+k} \quad \text{dla każdej liczby } k \in 0, 1, \ldots, 2001.$$

Oblicz $P(2002)$.

511. Policz, na ile sposobów można zapełnić planszę o wymiarach $n \times 3$ nienachodzącymi na siebie kostkami domina o wymiarach 2×1.

512. Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś D, E, F niech będą punktami przecięcia dwusiecznych kątów A, B, C trójkąta ABC odpowiednio z bokami BC, AC i AB. Udowodnij, że

$$\frac{1}{4} < \frac{AI}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} \cdot \frac{CI}{CF} \leqslant \frac{8}{27}.$$

513. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, zaś P punktem w jego wnętrzu. Proste AP, BP i CP przecinają boki BC, AC i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Udowodnij, że

$$DE \cdot EF \cdot FD \geqslant DB \cdot EC \cdot FA.$$