Pierwsze zawody indywidualne

grupa młodsza

sobota, 21 września 2002

11. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla wszystkich $x, y \in \mathbb{R}$ zależność

$$f(x+y) = f(x^2) + f(y^2).$$

12. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb a, b zachodzi nierówność

$$a^5 + a^3b^2 + a^2b^3 + b^5 \geqslant 2(a^4b + ab^4).$$

13. Udowodnij, że jeżeli liczby a i m są względnie pierwsze, to istnieje liczba całkowita dodatnia n taka, że $m \Big| a^n - 1$.

14. Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie D. W trójkąty ABD i ADC wpisano okręgi styczne do BC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnij, że $|AD| + |BC| = \frac{|AB|+|AC|+|BC|}{2} + |EF|$.

15. Rozważmy ciąg (a_n) określony następującymi zależnościami: $a_1 = 1$, $a_{n^2+k} = a_n + a_k$ dla $n > 0$, $0 < k \leqslant 2n + 1$. Rozstrzygnij, czy każda liczba całkowita dodatnia należy do tego ciągu.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa starsza

sobota, 21 września 2002

14. Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie D. W trójkąty ABD i ADC wpisano okręgi styczne do BC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnij, że $|AD|+|BC| = \frac{|AB|+|AC|+|BC|}{2} + |EF|$.

15. Rozważmy ciąg (a_n) określony następującymi zależnościami: $a_1 = 1$, $a_{n^2+k} = a_n + a_k$ dla $n > 0$, $2n+1 \geqslant k > 0$. Rozstrzygnij, czy każda liczba całkowita dodatnia należy do tego ciągu.

16. W jednym rzędzie ustawiono n słupków monet tak, że między każdymi dwoma słupkami tej samej wysokości znajduje się co najmniej jeden słupek wyższy. Najwyższy słupek zawiera k monet. Dla danej liczby k obliczyć największą możliwą wartość n.

17. Dane są trzy okręgi o promieniu 1 i środkach w wierzchołkach trójkąta ABC, przecinające się jak na rysunku. Udowodnij, że suma długości pogrubionych łuków wynosi π.

18. Na każdym polu szachownicy 1000×1000 napisano liczbę całkowitą. Liczby na dwóch polach o wspólnym boku różnią się o co najwyżej 100. Udowodnij, że istnieje liczba, którą na szachownicy napisano przynajmniej 6 razy.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa najstarsza

sobota, 21 września 2002

16. W jednym rzędzie ustawiono n słupków monet tak, że między każdymi dwoma słupkami tej samej wysokości znajduje się co najmniej jeden słupek wyższy. Najwyższy słupek zawiera k monet. Dla danej liczby k obliczyć największą możliwą wartość n.

17. Dane są trzy okręgi o promieniu 1 i środkach w wierzchołkach trójkąta ABC, przecinające się jak na rysunku. Udowodnij, że suma długości pogrubionych łuków wynosi π.

18. Na każdym polu szachownicy 1000×1000 napisano liczbę całkowitą. Liczby na dwóch polach o wspólnym boku różnią się o co najwyżej 100. Udowodnij, że istnieje liczba, którą na szachownicy napisano przynajmniej 6 razy.

19. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$ i $|EF| = |FA|$. Udowodnij, że

$$\frac{|CD|}{|AD|} + \frac{|EF|}{|CF|} + \frac{|AB|}{|EB|} \geqslant \frac{3}{2}.$$

110. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb $x_1, \ldots, x_n$, gdzie $n > 2$ zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{n}{4}.$$