Mecz Matematyczny

grupa młodsza i starsza

czwartek, 26 września 2002

81. W trójkącie ABC prosta k jest równoległa do boku AC i przechodzi przez wierzchołek B. Okrąg styczny do prostej k w punkcie B i przechodzący przez wierzchołek C przecina bok AB w punkcie D. Punkt E leży na półprostej $\overrightarrow{CD}$ i spełnia równanie $\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AD}$. Udowodnij, że jeżeli okrąg opisany na $\triangle BDE$ jest styczny do BC, to $|\measuredangle ACB| = 2|\measuredangle CAB|$.

82. Dany jest okrąg O, punkt A leżący na tym okręgu i punkt I leżący wewnątrz okręgu O. Skonstruuj trójkąt wpisany w okrąg O o wierzchołku w A, którego środek okręgu wpisanego leży w I.

83. Świat ma kształt sfery. Onufry, spoglądając na świat z dowolnego punktu leżącego na zewnątrz świata, uszczęśliwia tę część świata, którą widzi. Z ilu co najmniej punktów Onufry musi spojrzeć na świat, aby cały uszczęśliwić?

84. W danym czworościanie prowadzimy w następujący sposób sześć płaszczyzn: wybieramy jedną z sześciu krawędzi i prowadzimy płaszczyznę przechodzącą przez jej środek i prostopadłą do naprzeciwległej krawędzi. Udowodnij, że te płaszczyzny mają punkt wspólny.

85. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{x_i} \geqslant \frac{(2^n - 1)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

86. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) takie, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi $a[bn] = b[an]$.

87. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n > 3$ liczba n^2 ma w zapisie dziesiętnym przynajmniej jedną cyfrę parzystą.

88. Gracze A i B grają na szachownicy $(2n+1) \times (2n+1)$ w następującą grę: na początku jeden z rogów planszy jest pokolorowany na czarno, zaś naprzeciwległy na biało. W swoim ruchu A koloruje na czarno jedno z pól planszy, które dotychczas było niepokolorowane, a które sąsiadowało bokiem z jakimś czarnym polem. Analogicznie gracz B w swoim ruchu koloruje na biało pewnego sąsiada białego pola. W momencie, w którym jeden z graczy nie może wykonać ruchu, drugi wykonuje wszystkie dostępne mu ruchy i gra się kończy. Każdy dąży do tego, by pod koniec gry mieć jak najwięcej pól swojego koloru na planszy. Jaki będzie wynik gry, jeżeli obydwaj gracze nie popełniają żadnych błędów?

89. Niech k i $n > 6$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $\frac{1}{2}n < k < \frac{2}{3}n$. Wyznacz minimalną liczbę pól, którą należy usunąć z szachownicy $n \times n$ tak, aby nie dało się na niej położyć klocka $k \times 1$.

810. Na okręgu napisano 50 liczb należących do zbioru $\{-1, 1\}$. Możemy zadać pytanie o iloczyn trzech sąsiednich liczb. Ile minimalnie razy musimy się zapytać, aby poznać iloczyn wszystkich liczb?

811. Rozważmy nieskończoną szachownicę, na której na każdym polu napisano liczbę rzeczywistą. *Tetrisem* nazwijmy klocek składający się ze skończonego podzbioru pól (niekoniecznie spójny). Tetrisa możemy kłaść w dowolny sposób na szachownicę tak, aby boki tetrisa pokrywały się z bokami pól na szachownicy, możemy również go obracać. Mamy dane dwa różne tetrisy. Jakkolwiek byśmy nie położyli na szachownicy pierwszego tetrisa, suma liczb w polach, które on pokryje, będzie nieujemna. Udowodnij, że możemy tak położyć drugiego tetrisa, aby suma liczb w polach, które on przykrył, była nieujemna.

Mecz Matematyczny

grupa najstarsza

czwartek, 26 września 2002

811. Rozważmy nieskończoną szachownicę, na której na każdym polu napisano liczbę rzeczywistą. *Tetrisem* nazwijmy klocek składający się ze skończonego podzbioru pól (niekoniecznie spójny). Tetrisa możemy kłaść w dowolny sposób na szachownicę tak, aby boki tetrisa pokrywały się z bokami pól na szachownicy, możemy również go obracać. Mamy dane dwa różne tetrisy. Jakkolwiek byśmy nie położyli na szachownicy pierwszego tetrisa, suma liczb w polach, które on pokryje, będzie nieujemna. Udowodnij, że możemy tak położyć drugiego tetrisa, aby suma liczb w polach, które on przykrył, była nieujemna.

812. W mieście A mieszka n chłopców i n dziewczynek. Każda dziewczynka zna się z każdym chłopcem. W mieście B mieszka n dziewczynek i $2n-1$ chłopców, przy czym dziewczynka o numerze i zna się z chłopcami $1, 2, \ldots, 2i-1$ i tylko z nimi. Niech $A(r)$ i $B(r)$ będą liczbami sposobów, na jakie możemy utworzyć odpowiednio w mieście A i B r par tańczących, tak aby w każdej parze chłopak znał się z dziewczyną. Udowodnij, że $A(r) = B(r)$.

813. Udowodnij, że do pilnowania dowolnego wielokątnego muzeum o n ścianach wystarczy $[\frac{n}{3}]$ strażników. Zakładamy, że muzeum nie ma dziur wewnątrz, tzn. jego brzeg tworzy łamana zamknięta, która nie ma samoprzecięć, zaś strażnicy cały czas stoją w miejscu, choć mogą się obracać. Dowolny punkt muzeum jest pilnowany, jeśli choć jeden strażnik może go zobaczyć (zakładamy, że strażnicy widzą wzdłuż ścian).

814. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a_1 + a_2 + \ldots + a_n < 1$. Udowodnij nierówność:

$$\frac{a_1 a_2 \ldots a_n [1 - (a_1 + a_2 + \ldots + a_n)]}{(a_1 + a_2 + \ldots a_n)(1 - a_1)(1 - a_2) \ldots (1 - a_n)} \leqslant \frac{1}{n^{n+1}}.$$

815. Niech ABC będzie trójkątem, H jego ortocentrum, O środkiem okręgu opisanego, a R promieniem okręgu opisanego. Punkty D, E i F niech będą obrazami odpowiednio punktów A, B i C przy symetrii względem przeciwległych boków trójkąta ABC. Udowodnij, że D, E i F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $OH = 2R$.

816. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, O środkiem okręgu opisanego na nim, a R – promieniem tego okręgu. Prosta AO przecina okrąg opisany na trójkącie $\triangle BOC$ w punkcie D; punkty E i F zdefiniowane są analogicznie. Udowodnij, że $OD \cdot OE \cdot OF \geqslant 8R^3$.

817. Czworościan T nazwiemy *sztywnym*, jeśli nie istnieje czworościan U spełniający warunki:

(a) Czworościany T i U nie są przystające.

(b) Promienie sfer opisanych na czworościanach T i U są równe.

(c) Pola ścian czworościanu T są równe polom odpowiednich ścian czworościanu U.

Udowodnij, że jeśli czworościan sztywny ma równe pola ścian, to jest foremny. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan sztywny nie będący czworościanem foremnym.

818. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ jest określona następująco: $f(1) = 0$ oraz dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $f(n) = f([\frac{n}{2}]) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(1) Wyznacz maksymalną i minimalną wartość $f(n)$ dla $n \leqslant 2002$.

(2) Ile razy funkcja f przyjmuje wartość 0 dla argumentów nie większych niż 2002?

819. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba rzeczywista $x \in (2; 2\frac{1}{2})$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $[x^n] + n$ jest nieparzysta.

820. Niech p, q, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $n > p + q$. Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ będzie ciągiem liczb całkowitych o następujących własnościach:

(1) $x_0 = x_n = 0$.

(2) Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi równość $x_i - x_{i-1} = p$ lub $x_i - x_{i-1} = -q$.

Udowodnij, że istnieje para różnych indeksów (i, j) różna od $(0, n)$ i taka, że $x_i = x_j$.

821. Para magików pokazywała sztuczkę magiczną. Jeden z nich brał potasowaną talię 52 kart i losował z niej 5 kart. Następnie 4 z nich (wybrane przez siebie) po kolei pokazywał swojemu partnerowi, ten zaś odgadywał kartę, która nie została pokazana. Rozstrzygnij, czy tę sztuczkę da się przeprowadzić uczciwie, tzn. bez przekazywania informacji innych niż kolejność i wartości czterech kart (magicy mogli porozumiewać się przed spektaklem).