Pierwsze zawody indywidualne

grupa starsza

sobota, 21 września 2002

14. Z wierzchołka A trójkąta ABC poprowadzono prostą przecinającą bok BC w punkcie D. W trójkąty ABD i ADC wpisano okręgi styczne do BC odpowiednio w punktach E i F. Udowodnij, że $|AD| + |BC| = \frac{|AB|+|AC|+|BC|}{2} + |EF|$.

15. Rozważmy ciąg (a_n) określony następującymi zależnościami: $a_1 = 1$, $a_{n^2+k} = a_n + a_k$ dla $n > 0$, $2n + 1 \geqslant k > 0$. Rozstrzygnij, czy każda liczba całkowita dodatnia należy do tego ciągu.

16. W jednym rzędzie ustawiono n słupków monet tak, że między każdymi dwoma słupkami tej samej wysokości znajduje się co najmniej jeden słupek wyższy. Najwyższy słupek zawiera k monet. Dla danej liczby k obliczyć największą możliwą wartość n.

17. Dane są trzy okręgi o promieniu 1 i środkach w wierzchołkach trójkąta ABC, przecinające się jak na rysunku. Udowodnij, że suma długości pogrubionych łuków wynosi π.

18. Na każdym polu szachownicy 1000×1000 napisano liczbę całkowitą. Liczby na dwóch polach o wspólnym boku różnią się o co najwyżej 100. Udowodnij, że istnieje liczba, którą na szachownicy napisano przynajmniej 6 razy.

Zadania poranne

grupa starsza

niedziela, 22 września 2002

24. Na bokach BC i CD kwadratu $ABCD$ obrano punkty M i K takie, że $|\measuredangle MAK| = |\measuredangle BAM|$. Udowodnij, że $BM + KD = AK$.

25. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele rozwiązań równania $(x^2+1)(y^2+1) = z^2+1$ w liczbach całkowitych dodatnich (x, y, z).

26. Ile jest podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb całkowitych?

27. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nieposiadająca punktów stałych i taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(f(f(f(f(x))))) = x$.

Drugie zawody indywidualne

grupa starsza

niedziela, 22 września 2002

34. Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem równobocznym, a P dowolnym punktem leżącym na okręgu opisanym na nim, na łuku BC niezawierającym A. Udowodnij, że $BP + CP = AP$.

35. W pewnym nieskończonym ciągu arytmetycznym o wszystkich wyrazach będących liczbami całkowitymi występuje wyraz będący sześcianem liczby całkowitej. Udowodnij, że w tym ciągu występuje nieskończenie wiele liczb będących sześcianami liczb całkowitych.

36. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań:
$xy + yz + zx = 12$
$xyz = 2 + x + y + z.$

37. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem opisanym na okręgu O, przy czym punkty styczności P, Q, R odpowiednio z bokami AB, CD, EF są jednocześnie ich środkami. Punkty styczności okręgu O z prostymi BC, DE, FA to odpowiednio punkty X, Y, Z. Udowodnij, że proste PY, QZ i RX przecinają się w jednym punkcie.

38. W grupie matematyków każdy jest z kimś zaprzyjaźniony. Udowodnij, że wówczas istnieje wśród nich taki matematyk, że średnia liczba przyjaciół jego przyjaciół jest nie mniejsza od średniej liczby przyjaciół całego grona.

Zawody drużynowe

grupa starsza

poniedziałek, 23 września 2002

41. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty jednego koloru odległe o 1.

47. W trójkącie ABC dwusieczne kątów A i B przecinają boki BC i CA odpowiednio w punktach D i E. Ponadto $AE + DB = AB$. Wyznacz miarę kąta $\measuredangle ACB$.

48. W przestrzeni dany jest punkt O oraz skończony zbiór wektorów $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \ldots, \overrightarrow{v_n}$. Rozważmy zbiór tych punktów P, dla których wektor $\overrightarrow{OP}$ daje się przedstawić w postaci sumy $a_1\overrightarrow{v_1} + a_2\overrightarrow{v_2} + \ldots + a_n\overrightarrow{v_n}$, gdzie $0 \leqslant a_i \leqslant 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Rozstrzygnij, czy zbiór ten może być czworościanem.

49. Udowodnij, że dla dowolnych liczb całkowitych dodatnich n i k takich, że $k < n$, zachodzi następująca równość:

$$1^k + 2^k - 3^k + 4^k + \ldots \pm (2^n - 1)^k = 0,$$

przy czym m^k występuje ze znakiem $+$, jeśli w zapisie dwójkowym liczby m występuje nieparzysta liczba jedynek, a w przeciwnym razie występuje ze znakiem $-$.

410. Udowodnij, że dla każdej liczby $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$ zachodzi następująca podzielność:

$$n! \Big| 2^n(2n+1)(2n+3) \cdot \ldots \cdot (4n-1).$$

411. W trójkącie ABC zachodzi równość $2 \cdot AB = AC + BC$. Udowodnij, że następujące punkty: środek okręgu wpisanego, środek okręgu opisanego i środki boków AC i BC leżą na jednym okręgu.

412. Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $m \leqslant n$. Niech zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, spełniającym następujący warunek: jeśli dla pewnych $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ zachodzi $a_i + a_j \leqslant n$, to $a_i + a_j \in A$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

413. Dana jest liczba naturalna $n_0 > 1$. Gracze A i B wybierają na przemian liczby $n_1, n_2, \ldots$ według następujących reguł: gracz A, znając liczbę n_{2k}, może wybrać dowolną liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+1} taką, że $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$. Gracz B, znając liczbę n_{2k+1}, wybiera taką liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+2}, że $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym nieujemnym. Gracz A zwycięża, jeśli wybierze liczbę 1990, gracz B – jeśli wybierze liczbę 1. Dla jakich n_0 gracz A ma strategię wygrywającą, dla jakich ma ją gracz B, a kiedy żaden z nich nie ma strategii wygrywającej?

414. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nie mniejszych niż 1 zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{r_1+1} + \frac{1}{r_2+1} + \ldots + \frac{1}{r_n+1} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n} + 1}.$$

415. Dana jest pewna permutacja cyfr $1, 2, \ldots, 9$. Ruch polega na wzięciu monotonicznego spójnego podciągu tej permutacji i odwróceniu go (np. z 9<u>2456</u>1387 na 9<u>6542</u>1387). Udowodnij, że da się w co najwyżej 12 ruchach doprowadzić tę permutację do permutacji monotonicznej.

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa starsza

wtorek, 24 września 2002

54. Udowodnij, że jeśli $W(x)$ jest wielomianem o współczynnikach całkowitych i $|W(3)| = |W(7)| = 1$, to $W(x)$ nie ma pierwiastków całkowitych.

55. Wielokąt wypukły G zawarty jest we wnętrzu wielokąta wypukłego F. Rozstrzygnij, czy obwód wielokąta G może być większy od obwodu wielokąta F.

56. Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś D, E, F niech będą punktami przecięcia dwusiecznych kątów A, B, C trójkąta ABC odpowiednio z bokami BC, AC i AB. Udowodnij, że

$$\frac{AI}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} \cdot \frac{CI}{CF} \leqslant \frac{8}{27}.$$

57. Z szachownicy 13×13 wycięto środkowe pole. Czy otrzymaną figurę da się pokryć klockami 4×1?

58. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że równanie

$$a^5 + b^6 + c^7 + d^8 + e^9 + f^{10} + g^{11} + h^{12} = n$$

ma co najmniej 2002002 rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h.

59. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi równość:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2}{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2} = \frac{n}{2}.$$

Trzecie zawody indywidualne

grupa starsza

środa, 25 września 2002

65. Rozstrzygnij, czy istnieje taki ciąg liczb całkowitych dodatnich (a_n), że dla każdej liczby całkowitej nieujemnej k ciąg (b_n) zdefiniowany następująco: $b_n = k + a_n$ dla $n = 0, 1, 2, \ldots$ zawiera skończoną liczbę wyrazów będących liczbami pierwszymi.

66. Udowodnij, że każdy wielościan wypukły ma ścianę trójkątną lub kąt trójścienny.

67. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$4abc - a^4 - b^4 - c^4 \leqslant 1.$$

68. W pewnym języku są tylko dwie litery: A i B. Słowa z tego języka spełniają następujące warunki:

(a) Jedynym słowem o długości 1 jest A.

(b) Dowolna grupa liter $X_1X_2\ldots X_nX_{n+1}$ (gdzie $X_i \in \{A, B\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$) tworzy słowo długości $n+1$, gdy zawiera choć jedną literę A i przy tym nie jest postaci $X_1X_2\ldots X_nA$, gdzie $X_1X_2\ldots X_n$ jest słowem długości n.

Znajdź jawny wzór na liczbę słów długości n.

69. Na płaszczyźnie rozmieszczono nieskończenie wiele modliszek w taki sposób, by odległość między żadnymi dwiema nie była mniejsza niż 2 metry. Zakładamy, że modliszka porusza się z prędkością nie większą niż 10 metrów na minutę oraz że moze zabić inną tylko wtedy, gdy znajdują się w jednym punkcie. Ponadto owad umiera z rozpaczy natychmiast, gdy tylko upłynie minuta od chwili, gdy po raz ostatni zamordował współplemieńca. Udowodnij, że po kwadransie żadna modliszka nie ostanie się przy życiu.

610. W trójkącie ABC zachodzi $AB > AC$. Dwusieczna wewnętrzna kąta przy wierzchołku A przecina bok BC w punkcie D. E jest takim punktem na AB, że kąt $\measuredangle EDB$ jest prosty. F jest takim punktem na AC, że kąty $\measuredangle BED$ i $\measuredangle DEF$ są przystające. Udowodnij, że wówczas również kąty $\measuredangle BAD$ i $\measuredangle FDC$ są przystające.

Druga seria zadań powtórzeniowych

grupa starsza

środa, 25 września 2002

74. Rozstrzygnij, czy jeżeli czworościan ma trzy różne osie symetri, to musi być foremny.

75. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek:

$$xf(y) - yf(x) = (y^2 - x^2)xy.$$

76. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych następujący układ równań:

$(x - y)(x^2 - y^2) = 16$

$(x + y)(x^2 + y^2) = 40.$

Mecz Matematyczny

grupa młodsza i starsza

czwartek, 26 września 2002

81. W trójkącie ABC prosta k jest równoległa do boku AC i przechodzi przez wierzchołek B. Okrąg styczny do prostej k w punkcie B i przechodzący przez wierzchołek C przecina bok AB w punkcie D. Punkt E leży na półprostej $\overrightarrow{CD}$ i spełnia równanie $\frac{CE}{BE} = \frac{AC}{AD}$. Udowodnij, że jeżeli okrąg opisany na $\triangle BDE$ jest styczny do BC, to $|\measuredangle ACB| = 2|\measuredangle CAB|$.

82. Dany jest okrąg O, punkt A leżący na tym okręgu i punkt I leżący wewnątrz okręgu O. Skonstruuj trójkąt wpisany w okrąg O o wierzchołku w A, którego środek okręgu wpisanego leży w I.

83. Świat ma kształt sfery. Onufry, spoglądając na świat z dowolnego punktu leżącego na zewnątrz świata, uszczęśliwia tę część świata, którą widzi. Z ilu co najmniej punktów Onufry musi spojrzeć na świat, aby cały uszczęśliwić?

84. W danym czworościanie prowadzimy w następujący sposób sześć płaszczyzn: wybieramy jedną z sześciu krawędzi i prowadzimy płaszczyznę przechodzącą przez jej środek i prostopadłą do naprzeciwległej krawędzi. Udowodnij, że te płaszczyzny mają punkt wspólny.

85. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą dodatnią. Udowodnij, że dla każdych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zachodzi nierówność:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{4^{i-1}}{x_i} \geqslant \frac{(2^n - 1)^2}{\sum_{i=1}^{n} x_i}.$$

86. Wyznacz wszystkie pary liczb rzeczywistych (a, b) takie, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n zachodzi $a[bn] = b[an]$.

87. Udowodnij, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n > 3$ liczba n^2 ma w zapisie dziesiętnym przynajmniej jedną cyfrę parzystą.

88. Gracze A i B grają na szachownicy $(2n + 1) \times (2n + 1)$ w następującą grę: na początku jeden z rogów planszy jest pokolorowany na czarno, zaś naprzeciwległy na biało. W swoim ruchu A koloruje na czarno jedno z pól planszy, które dotychczas było niepokolorowane, a które sąsiadowało bokiem z jakimś czarnym polem. Analogicznie gracz B w swoim ruchu koloruje na biało pewnego sąsiada białego pola. W momencie, w którym jeden z graczy nie może wykonać ruchu, drugi wykonuje wszystkie dostępne mu ruchy i gra się kończy. Każdy dąży do tego, by pod koniec gry mieć jak najwięcej pól swojego koloru na planszy. Jaki będzie wynik gry, jeżeli obydwaj gracze nie popełniają żadnych błędów?

89. Niech k i $n > 6$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $\frac{1}{2}n < k < \frac{2}{3}n$. Wyznacz minimalną liczbę pól, którą należy usunąć z szachownicy $n \times n$ tak, aby nie dało się na niej położyć klocka $k \times 1$.

810. Na okręgu napisano 50 liczb należących do zbioru $\{-1, 1\}$. Możemy zadać pytanie o iloczyn trzech sąsiednich liczb. Ile minimalnie razy musimy się zapytać, aby poznać iloczyn wszystkich liczb?

811. Rozważmy nieskończoną szachownicę, na której na każdym polu napisano liczbę rzeczywistą. *Tetrisem* nazwijmy klocek składający się ze skończonego podzbioru pól (niekoniecznie spójny). Tetrisa możemy kłaść w dowolny sposób na szachownicę tak, aby boki tetrisa pokrywały się z bokami pól na szachownicy, możemy również go obracać. Mamy dane dwa różne tetrisy. Jakkolwiek byśmy nie położyli na szachownicy pierwszego tetrisa, suma liczb w polach, które on pokryje, będzie nieujemna. Udowodnij, że możemy tak położyć drugiego tetrisa, aby suma liczb w polach, które on przykrył, była nieujemna.

Sprawdzian końcowy

grupa starsza

piątek, 27 września 2002

97. Rozstrzygnij, czy istnieją takie czworościany T_1 i T_2, że objętość czworościanu T_1 jest większa od objętości czworościanu T_2, ale pole żadnej ściany czworościanu T_1 nie przekracza pola żadnej ściany czworościanu T_2.

98. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej nieujemnej n prawdziwa jest następująca tożsamość:

$$\sum_{k=m}^{n} k\binom{k-1}{m-1} = m\binom{n+1}{m+1}.$$

99. Ze zbioru liczb $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ wybrano podzbiór $(n+1)$-elementowy. Udowodnij, że w podzbiorze tym istnieją dwie różne liczby, z których jedna dzieli drugą.

910. Częścią wspólną dwóch jednakowych kwadratów jest ośmiokąt. Boki jednego z kwadratów zostały narysowane na oliwkowo, drugiego zaś na fioletowo. Udowodnij, że suma długości oliwkowych boków ośmiokąta jest równa sumie długości jego fioletowych boków.

911. Znajdź wszystkie różnowartościowe funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1 \quad \text{dla} \;\; x, y \in R.$$

912. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, proste AD i BC przecinają się w punkcie F, zaś przekątne AC i BD przecinają się w punkcie G. Prosta FG przecina prostą AB w punkcie H. Udowodnij, że

$$\frac{AH}{BH} = \frac{AE}{BE}.$$