Pierwsze zawody indywidualne

grupa najstarsza

sobota, 21 września 2002

16. W jednym rzędzie ustawiono n słupków monet tak, że między każdymi dwoma słupkami tej samej wysokości znajduje się co najmniej jeden słupek wyższy. Najwyższy słupek zawiera k monet. Dla danej liczby k obliczyć największą możliwą wartość n.

17. Dane są trzy okręgi o promieniu 1 i środkach w wierzchołkach trójkąta ABC, przecinające się jak na rysunku. Udowodnij, że suma długości pogrubionych łuków wynosi π.

18. Na każdym polu szachownicy 1000×1000 napisano liczbę całkowitą. Liczby na dwóch polach o wspólnym boku różnią się o co najwyżej 100. Udowodnij, że istnieje liczba, którą na szachownicy napisano przynajmniej 6 razy.

19. W sześciokącie wypukłym $ABCDEF$ zachodzą równości $|AB| = |BC|$, $|CD| = |DE|$ i $|EF| = |FA|$. Udowodnij, że

$$\frac{|CD|}{|AD|} + \frac{|EF|}{|CF|} + \frac{|AB|}{|EB|} \geqslant \frac{3}{2}.$$

110. Udowodnij, że dla dowolnych dodatnich liczb $x_1, \ldots, x_n$, gdzie $n > 2$ zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{x_1}{x_2 + x_3} + \frac{x_2}{x_3 + x_4} + \ldots + \frac{x_n}{x_1 + x_2} \geqslant \frac{n}{4}.$$

Zadania poranne

grupa najstarsza

niedziela, 22 września 2002

26. Ile jest podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$ takich, które nie zawierają dwóch kolejnych liczb całkowitych?

27. Rozstrzygnij, czy istnieje funkcja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nieposiadająca punktów stałych i taka, że dla każdego $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $f(f(f(f(f(x))))) = x$.

28. W trójkącie ABC punkt D, leżący na boku AB, dzieli go w stosunku $1 : 2$, tzn. tak, że $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{2}$. Ponadto $|\angle BAC| = \frac{\pi}{4}$, zaś $|\angle BDC| = \frac{\pi}{3}$. Oblicz $|\angle ABC|$.

29. Na tablicy napisano n liczb całkowitych. Jeśli dwie z nich są równe k to można je zamienić na $k-1$ i $k+1$. Udowodnij, że nie można tego procesu kontynuować w nieskończoność.

Drugie zawody indywidualne

grupa najstarsza

niedziela, 22 września 2002

36. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań:
$xy + yz + zx = 12$
$xyz = 2 + x + y + z.$

37. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem opisanym na okręgu O, przy czym punkty styczności P, Q, R odpowiednio z bokami AB,CD, EF są jednocześnie ich środkami. Punkty styczności okręgu O z bokami BC, DE, FA to odpowiednio punkty X, Y, Z. Udowodnij, że proste PY, QZ i RX przecinają się w jednym punkcie.

38. W grupie matematyków każdy jest z kimś zaprzyjaźniony. Udowodnij, że wówczas istnieje wśród nich taki matematyk, że średnia liczba przyjaciół jego przyjaciół jest nie mniejsza od średniej liczby przyjaciół całego grona.

39. Niech m, n, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi warunki: $m > n$ i $b > 1$. Udowodnij, że jeśli $b^m - 1$ i $b^n - 1$ mają te same dzielniki pierwsze, to $b + 1$ jest potęgą dwójki.

310. Niech M i N będą takimi punktami wewnątrz trójkąta ABC, że miary kątów $\measuredangle MAB$ i $\measuredangle NAC$ oraz $\measuredangle MBA$ i $\measuredangle NBC$ są równe. Udowodnij, że:

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$

Zawody drużynowe

grupa najstarsza

poniedziałek, 23 września 2002

41. Każdy punkt płaszczyzny pomalowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją dwa punkty jednego koloru odległe o 1.

411. W trójkącie ABC zachodzi równość $2 \cdot AB = AC + BC$. Udowodnij, że następujące punkty: środek okręgu wpisanego, środek okręgu opisanego i środki boków AC i BC leżą na jednym okręgu.

412. Niech m i n będą liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $m \leqslant n$. Niech zbiór $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ będzie dowolnym podzbiorem zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, spełniającym następujący warunek: jeśli dla pewnych $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ zachodzi $a_i + a_j \leqslant n$, to $a_i + a_j \in A$. Udowodnij, że

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_m}{m} \geqslant \frac{n+1}{2}.$$

413. Dana jest liczba naturalna $n_0 > 1$. Gracze A i B wybierają na przemian liczby $n_1, n_2, \ldots$ według następujących reguł: gracz A, znając liczbę n_{2k}, może wybrać dowolną liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+1} taką, że $n_{2k} \leqslant n_{2k+1} \leqslant n_{2k}^2$. Gracz B, znając liczbę n_{2k+1}, wybiera taką liczbę całkowitą dodatnią n_{2k+2}, że $\frac{n_{2k+1}}{n_{2k+2}}$ jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym nieujemnym. Gracz A zwycięża, jeśli wybierze liczbę 1990, gracz B – jeśli wybierze liczbę 1. Dla jakich n_0 gracz A ma strategię wygrywającą, dla jakich ma ją gracz B, a kiedy żaden z nich nie ma strategii wygrywającej?

414. Udowodnij, że dla liczb rzeczywistych $r_1, r_2, \ldots, r_n$ nie mniejszych niż 1 zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{r_1+1}+\frac{1}{r_2+1}+\ldots+\frac{1}{r_n+1} \geqslant \frac{n}{\sqrt[n]{r_1 r_2 \ldots r_n}+1}.$$

415. Dana jest pewna permutacja cyfr $1, 2, \ldots, 9$. Ruch polega na wzięciu monotonicznego spójnego podciągu tej permutacji i odwróceniu go (np. z $9\underline{2456}1387$ na $9\underline{6542}1387$). Udowodnij, że da się w co najwyżej 12 ruchach doprowadzić tę permutację do permutacji monotonicznej.

416. Niech m, n, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi, spełniającymi warunki: $m > n$ i $b > 1$. Udowodnij, że jeśli $b^m - 1$ i $b^n - 1$ mają te same dzielniki pierwsze, to $b + 1$ jest potęgą dwójki.

417. Definiujemy rekurencyjnie ciąg liczb całkowitych nieujemnych w następujący sposób: $a_0 = 1, a_1 = 1$ oraz $a_{2n} = 3a_n$ i $a_{2n+1} = 3a_n + 1$ dla $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$

(a) Scharakteryzuj wszystkie liczby całkowite nieujemne n, dla których istnieje dokładnie jedna para (k, l) liczb całkowitych nieujemnych, spełniająca warunki $k \geqslant l$ i $a_k + a_l = n$.

(b) Dla każdego n niech $f(n)$ będzie liczbą par (k, l), spełniających warunki podane w punkcie (a). Oblicz, jaką największą wartość przyjmuje $f(n)$ dla $n < 3^{1998}$.

418. Niech D będzie punktem wewnętrznym boku BC trójkąta ABC. Prosta AD przecina okrąg opisany na trójkącie ABC w punkcie X. Niech P i Q będą rzutami X na proste AB i AC odpowiednio. Udowodnij, że prosta PQ jest styczna do okręgu o średnicy XD wtedy i tylko wtedy, gdy $AB = AC$.

419. W wypukłym sześciokącie $ABCDEF$ zachodzą równości $AB = BC = CD$ i $DE = EF = FA$. Ponadto $|\angle BCD| = |\angle EFA| = \frac{\pi}{3}$. Punkty G i H we wnętrzu wielokąta spełniają warunki $|\angle AGB| = |\angle DHE| = \frac{2\pi}{3}$. Udowodnij, że $AG + GB + GH + DH + HE \geqslant CF$.

Pierwsza seria zadań powtórzeniowych

grupa najstarsza

wtorek, 24 września 2002

58. Udowodnij, że istnieje taka liczba całkowita dodatnia n, że równanie

$$a^5 + b^6 + c^7 + d^8 + e^9 + f^{10} + g^{11} + h^{12} = n$$

ma co najmniej 2002002 rozwiązań w liczbach całkowitych dodatnich a, b, c, d, e, f, g, h.

59. Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oblicz wartość wyrażenia:

$$\frac{\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}^2}{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2}.$$

510. Dany jest wielomian stopnia 2001 o współczynnikach rzeczywistych, o następującej własności:

$$P(k) = \frac{2002k}{2002+k} \quad \text{dla każdej liczby } k \in 0, 1, \ldots, 2001.$$

Oblicz $P(2002)$.

511. Policz, na ile sposobów można zapełnić planszę o wymiarach $n \times 3$ nienachodzącymi na siebie kostkami domina o wymiarach 2×1.

512. Niech punkt I będzie środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, zaś D, E, F niech będą punktami przecięcia dwusiecznych kątów A, B, C trójkąta ABC odpowiednio z bokami BC, AC i AB. Udowodnij, że

$$\frac{1}{4} < \frac{AI}{AD} \cdot \frac{BI}{BE} \cdot \frac{CI}{CF} \leqslant \frac{8}{27}.$$

513. Niech ABC będzie trójkątem równobocznym, zaś P punktem w jego wnętrzu. Proste AP, BP i CP przecinają boki BC, AC i AB odpowiednio w punktach D, E i F. Udowodnij, że

$$DE \cdot EF \cdot FD \geqslant DB \cdot EC \cdot FA.$$

Trzecie zawody indywidualne

grupa najstarsza

środa, 25 września 2002

68. W pewnym języku są tylko dwie litery A i B. Słowa z tego języka spełniają następujące warunki:

(a) Jedynym słowem o długości 1 jest A.

(b) Dowolna grupa liter $X_1X_2\ldots X_nX_{n+1}$ (gdzie $X_i \in \{A, B\}$ dla $i = 1, 2, \ldots, n, n+1$) tworzy słowo długości $n+1$, gdy zawiera choć jedną literę A i przy tym nie jest postaci $X_1X_2\ldots X_nA$, gdzie $X_1X_2\ldots X_n$ jest słowem długości n.

Znajdź jawny wzór na liczbę słów długości n.

69. Na płaszczyźnie rozmieszczono nieskończenie wiele modliszek w taki sposób, by odległość między żadnymi dwiema nie była mniejsza niż 2 metry. Zakładamy, że modliszka porusza się z prędkością nie większą niż 10 metrów na minutę oraz że moze zabić inną tylko wtedy, gdy znajdują się w jednym punkcie. Ponadto owad umiera z rozpaczy natychmiast, gdy tylko upłynie minuta od chwili, gdy po raz ostatni zamordował współplemieńca. Udowodnij, że po kwadransie żadna modliszka nie ostanie się przy życiu.

610. W trójkącie ABC zachodzi $AB > AC$. Dwusieczna wewnętrzna kąta przy wierzchołku A przecina bok BC w punkcie D. E jest takim punktem na AB, że kąt $\measuredangle EDB$ jest prosty. F jest takim punktem na AC, że kąty $\measuredangle BED$ i $\measuredangle DEF$ są przystające. Udowodnij, że wówczas również kąty $\measuredangle BAD$ i $\measuredangle FDC$ są przystające.

611. Niech X będzie zbiorem punktów płaszczyzny (x, y) o obu współrzędnych całkowitych. Drogą długości n nazywamy dowolny ciąg $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ punktów należących do X takich, że $|P_iP_{i-1}| = 1$ dla $i = 1, 2, \ldots, n$. Niech $F(n)$ będzie liczbą różnych dróg $(P_0, P_1, \ldots, P_n)$ o początku $P_0 = (0, 0)$ i końcu P_n należącym do prostej $y = 0$. Udowodnij, że $F(n) = \binom{2n}{n}$.

612. Pewnego dnia Karolek siedział sobie przed domem i rozmyślał. Nagle zobaczył na niebie n bocianów. Bystry umysł Karolka natychmiast pozwolił mu spostrzec, że może tak przestawić cyfry zapisu dziesiętnego liczby n, by po dodaniu tak otrzymanej liczby do n otrzymać liczbę 10^{100}. Udowodnij, że ostatnią cyfrą otrzymanej w wyniku przestawienia cyfr liczby było 0.

613. Okrąg O jest styczny do dwóch równoległych prostych l_1 i l_2. Okrąg O_1 jest styczny do prostej l_1 w punkcie A i zewnętrznie do okręgu O w punkcie C. Okrąg O_2 jest styczny do prostej l_2 w punkcie B, zewnętrznie do okręgu O w punkcie D oraz zewnętrznie do okręgu O_1 w punkcie E. Proste AD i BC przecinają się w punkcie Q. Udowodnij, że punkt Q jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDE.

Druga seria zadań powtórzeniowych

grupa najstarsza

środa, 25 września 2002

76. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych następujący układ równań:
$(x-y)(x^2-y^2)=16$
$(x+y)(x^2+y^2)=40.$

77. Wyznacz wszystkie funkcje $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x,y\in\mathbb{R}$ warunek:

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2).$$

78. W czworościanie pola sześciu trójkątów, których podstawami są krawędzie, a wierzchołkami środki przeciwległych krawędzi czworościanu, są równe. Udowodnij, że czworościan ten jest foremny.

Mecz Matematyczny

grupa najstarsza

czwartek, 26 września 2002

811. Rozważmy nieskończoną szachownicę, na której na każdym polu napisano liczbę rzeczywistą. *Tetrisem* nazwijmy klocek składający się ze skończonego podzbioru pól (niekoniecznie spójny). Tetrisa możemy kłaść w dowolny sposób na szachownicę tak, aby boki tetrisa pokrywały się z bokami pól na szachownicy, możemy również go obracać. Mamy dane dwa różne tetrisy. Jakkolwiek byśmy nie położyli na szachownicy pierwszego tetrisa, suma liczb w polach, które on pokryje, będzie nieujemna. Udowodnij, że możemy tak położyć drugiego tetrisa, aby suma liczb w polach, które on przykrył, była nieujemna.

812. W mieście A mieszka n chłopców i n dziewczynek. Każda dziewczynka zna się z każdym chłopcem. W mieście B mieszka n dziewczynek i $2n-1$ chłopców, przy czym dziewczynka o numerze i zna się z chłopcami $1,2,\ldots,2i-1$ i tylko z nimi. Niech $A(r)$ i $B(r)$ będą liczbami sposobów, na jakie możemy utworzyć odpowiednio w mieście A i B r par tańczących, tak aby w każdej parze chłopak znał się z dziewczyną. Udowodnij, że $A(r)=B(r)$.

813. Udowodnij, że do pilnowania dowolnego wielokątnego muzeum o n ścianach wystarczy $[\frac{n}{3}]$ strażników. Zakładamy, że muzeum nie ma dziur wewnątrz, tzn. jego brzeg tworzy łamana zamknięta, która nie ma samoprzecięć, zaś strażnicy cały czas stoją w miejscu, choć mogą się obracać. Dowolny punkt muzeum jest pilnowany, jeśli choć jeden strażnik może go zobaczyć (zakładamy, że strażnicy widzą wzdłuż ścian).

814. Niech $a_1,a_2,\ldots,a_n$ będą dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniającymi warunek $a_1+a_2+\ldots+a_n<1$. Udowodnij nierówność:

$$\frac{a_1a_2\ldots a_n[1-(a_1+a_2+\ldots+a_n)]}{(a_1+a_2+\ldots a_n)(1-a_1)(1-a_2)\ldots(1-a_n)}\leqslant\frac{1}{n^{n+1}}.$$

815. Niech ABC będzie trójkątem, H jego ortocentrum, O środkiem okręgu opisanego, a R promieniem okręgu opisanego. Punkty D, E i F niech będą obrazami odpowiednio punktów A, B i C przy symetrii względem przeciwległych boków trójkąta ABC. Udowodnij, że D, E i F są współliniowe wtedy i tylko wtedy, gdy $OH = 2R$.

816. Niech ABC będzie trójkątem ostrokątnym, O środkiem okręgu opisanego na nim, a R – promieniem tego okręgu. Prosta AO przecina okrąg opisany na trójkącie $\triangle BOC$ w punkcie D; punkty E i F zdefiniowane są analogicznie. Udowodnij, że $OD \cdot OE \cdot OF \geqslant 8R^3$.

817. Czworościan T nazwiemy *sztywnym*, jeśli nie istnieje czworościan U spełniający warunki:

(a) Czworościany T i U nie są przystające.

(b) Promienie sfer opisanych na czworościanach T i U są równe.

(c) Pola ścian czworościanu T są równe polom odpowiednich ścian czworościanu U.

Udowodnij, że jeśli czworościan sztywny ma równe pola ścian, to jest foremny. Rozstrzygnij, czy istnieje czworościan sztywny nie będący czworościanem foremnym.

818. Niech $\mathbb{N}$ oznacza zbiór liczb całkowitych dodatnich. Funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ jest określona następująco: $f(1) = 0$ oraz dla każdego $n \geqslant 1$ zachodzi $f(n) = f([\frac{n}{2}]) + (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

(1) Wyznacz maksymalną i minimalną wartość $f(n)$ dla $n \leqslant 2002$.

(2) Ile razy funkcja f przyjmuje wartość 0 dla argumentów nie większych niż 2002?

819. Rozstrzygnij, czy istnieje taka liczba rzeczywista $x \in (2; 2\frac{1}{2})$, że dla każdej liczby całkowitej dodatniej n liczba $[x^n] + n$ jest nieparzysta.

820. Niech p, q, n będą dodatnimi liczbami całkowitymi takimi, że $n > p + q$. Niech $x_0, x_1, \ldots, x_n$ będzie ciągiem liczb całkowitych o następujących własnościach:

(1) $x_0 = x_n = 0$.

(2) Dla każdego $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ zachodzi równość $x_i - x_{i-1} = p$ lub $x_i - x_{i-1} = -q$.

Udowodnij, że istnieje para różnych indeksów (i, j) różna od $(0, n)$ i taka, że $x_i = x_j$.

821. Para magików pokazywała sztuczkę magiczną. Jeden z nich brał potasowaną talię 52 kart i losował z niej 5 kart. Następnie 4 z nich (wybrane przez siebie) po kolei pokazywał swojemu partnerowi, ten zaś odgadywał kartę, która nie została pokazana. Rozstrzygnij, czy tę sztuczkę da się przeprowadzić uczciwie, tzn. bez przekazywania informacji innych niż kolejność i wartości czterech kart (magicy mogli porozumiewać się przed spektaklem).

Sprawdzian końcowy

grupa najstarsza

piątek, 27 września 2002

96. We wnętrzu trójkąta równobocznego o boku 12 wybrano 300 punktów. Udowodnij, że istnieją wśród nich trzy, tworzące trójkąt (być może zdegenerowany) o obwodzie nie większym niż 3.

912. Dany jest czworokąt wypukły $ABCD$, który nie jest trapezem. Proste AB i CD przecinają się w punkcie E, proste AD i BC przecinają się w punkcie F, zaś przekątne AC i BD przecinają się w punkcie G. Prosta FG przecina prostą AB w punkcie H. Udowodnij, że

$$\frac{AH}{BH} = \frac{AE}{BE}.$$

913. Dane są dwa okręgi przecinające się w punktach X i Y. Udowodnij, że istnieją cztery punkty o następującej własności: dla każdego okręgu stycznego do danych okręgów w A i B i przecinającego prostą XY w C i D każda z prostych AC, BC, AD, BD przechodzi przez jeden z tych punktów.

914. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych $a, b, c \in [-1, 1]$ następujący układ równań:

$$\begin{cases} a = 3c - 4c^3 \\ b = 3a - 4a^3 \\ c = 3b - 4b^3. \end{cases}$$

915. Rozstrzygnij, czy następujący układ równań ma rozwiązania w liczbach rzeczywistych $a, b, c, d, e \leqslant 3$:

$$\begin{cases} a + b + c + d + e = 3 \\ a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 = 39 \\ a^3 + b^3 + c^3 + d^3 + e^3 = 57. \end{cases}$$

916. Dana jest liczba całkowita $n > 1$. Niech $d_1, d_2, \ldots, d_k$ będą wszystkimi dodatnimi dzielnikami liczby n. Przyjmijmy $D = d_1d_2 + d_2d_3 + \ldots + d_{k-1}d_k$.

(a) Wykaż, że $D < n^2$.

(b) Wyznacz wszystkie n, dla których n^2 dzieli się przez D.