

Druga seria zadań powtórzeniowych

grupa młodsza

środa, 25 września 2002

71. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b zachodzi nierówność:

$$\frac{a^3 + b^6}{2} \geq 3ab^2 - 4.$$

72. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek

$$f(x + y) = f(f(x)) + y + 1.$$

73. Za siedmioma górami, za siedmioma rzekami, w czasach, kiedy Ziemia była jeszcze płaszczyzną, żyli sobie dwaj druidzi. Zbudowali oni swoje domki specjalnie w miejscach koncentracji energii magicznej – jeden w punkcie A , drugi w punkcie C . Wkrótce odkryli oni w okolicy dwa inne ośrodki energii magicznej, w których to wzniesli obeliski (są to punkty B i D). Trzy miejsca koncentracji energii nie mogą być współliniowe. Druidzi szybko zauważyli, że jeśli umówią się pod obeliskiem B i wyjdą z domków o tej samej porze, dotrą tam jednocześnie. Tak samo jest z obeliskiem D (druidzi chodzą zawsze ze stałą prędkością, aczkolwiek każdy może chodzić z inną). Pewnego dnia druidzi obrazili swojego boga Manitulualoa i aby go przebłagać muszą wznieść trzeci obelisk w punkcie E na prostej AC tak, aby BE było dwusieczną $\sphericalangle ABC$ i DE było dwusieczną $\sphericalangle ADC$. Udowodnij, że druidzi mogą przebłagać swojego boga.

Druga seria zadań powtórzeniowych

grupa starsza

środa, 25 września 2002

74. Rozstrzygnij, czy jeżeli czworościan ma trzy różne osie symetri, to musi być foremny.

75. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek:

$$xf(y) - yf(x) = (y^2 - x^2)xy.$$

76. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych następujący układ równań:

$$(x - y)(x^2 - y^2) = 16$$

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 40.$$

Druga seria zadań powtórzeniowych

grupa najstarsza

środa, 25 września 2002

76. Rozwiąż w liczbach rzeczywistych następujący układ równań:

$$(x - y)(x^2 - y^2) = 16$$

$$(x + y)(x^2 + y^2) = 40.$$

77. Wyznacz wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające dla każdych $x, y \in \mathbb{R}$ warunek:

$$(x - y)f(x + y) - (x + y)f(x - y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

78. W czworościanie pola sześciu trójkątów, których podstawami są krawędzie, a wierzchołkami środki przeciwległych krawędzi czworościanu, są równe. Udowodnij, że czworościan ten jest foremny.