Drugie zawody indywidualne

grupa młodsza

niedziela, 22 września 2002

31. Na szachownicy 2001 na 2003 są rozmieszczone pionki, po jednym na każdym polu. Czy można je tak poprzestawiać, aby każdy pionek stał na polu sąsiadującym bokiem z polem, które zajmował i żeby wciąż na każdym polu stał dokładnie jeden pionek?

32. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich a, b, c zachodzi następująca nierówność:

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

33. W trójkącie ABP zachodzi równość $AB = AP$ i kąt $\measuredangle PAB$ jest ostry. PC jest prostą prostopadłą do BP i punkt C jest po tej samej stronie BP co A. Punkt D uzupełnia równoległobok $ABCD$. Proste PC i DA przecinają się w punkcie M. Udowodnij, że punkt M jest środkiem odcinka DA.

34. Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem równobocznym, a P dowolnym punktem leżącym na okręgu opisanym na nim, na łuku BC niezawierającym A. Udowodnij, że $BP + CP = AP$.

35. W pewnym nieskończonym ciągu arytmetycznym o wszystkich wyrazach będących liczbami całkowitymi występuje wyraz będący sześcianem liczby całkowitej. Udowodnij, że w tym ciągu występuje nieskończenie wiele liczb będących sześcianami liczb całkowitych.

Drugie zawody indywidualne

grupa starsza

niedziela, 22 września 2002

34. Niech $\triangle ABC$ będzie trójkątem równobocznym, a P dowolnym punktem leżącym na okręgu opisanym na nim, na łuku BC niezawierającym A. Udowodnij, że $BP + CP = AP$.

35. W pewnym nieskończonym ciągu arytmetycznym o wszystkich wyrazach będących liczbami całkowitymi występuje wyraz będący sześcianem liczby całkowitej. Udowodnij, że w tym ciągu występuje nieskończenie wiele liczb będących sześcianami liczb całkowitych.

36. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań:
$xy + yz + zx = 12$
$xyz = 2 + x + y + z$.

37. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem opisanym na okręgu O, przy czym punkty styczności P, Q, R odpowiednio z bokami AB, CD, EF są jednocześnie ich środkami. Punkty styczności okręgu O z prostymi BC, DE, FA to odpowiednio punkty X, Y, Z. Udowodnij, że proste PY, QZ i RX przecinają się w jednym punkcie.

38. W grupie matematyków każdy jest z kimś zaprzyjaźniony. Udowodnij, że wówczas istnieje wśród nich taki matematyk, że średnia liczba przyjaciół jego przyjaciół jest nie mniejsza od średniej liczby przyjaciół całego grona.

Drugie zawody indywidualne

grupa najstarsza

niedziela, 22 września 2002

36. Rozwiąż w liczbach dodatnich układ równań:
$xy + yz + zx = 12$
$xyz = 2 + x + y + z.$

37. Niech $ABCDEF$ będzie sześciokątem opisanym na okręgu O, przy czym punkty styczności P, Q, R odpowiednio z bokami AB,CD, EF są jednocześnie ich środkami. Punkty styczności okręgu O z bokami BC, DE, FA to odpowiednio punkty X, Y, Z. Udowodnij, że proste PY, QZ i RX przecinają się w jednym punkcie.

38. W grupie matematyków każdy jest z kimś zaprzyjaźniony. Udowodnij, że wówczas istnieje wśród nich taki matematyk, że średnia liczba przyjaciół jego przyjaciół jest nie mniejsza od średniej liczby przyjaciół całego grona.

39. Niech m, n, b będą dodatnimi liczbami całkowitymi spełniającymi warunki: $m > n$ i $b > 1$. Udowodnij, że jeśli $b^m - 1$ i $b^n - 1$ mają te same dzielniki pierwsze, to $b + 1$ jest potęgą dwójki.

310. Niech M i N będą takimi punktami wewnątrz trójkąta ABC, że miary kątów $\measuredangle MAB$ i $\measuredangle NAC$ oraz $\measuredangle MBA$ i $\measuredangle NBC$ są równe. Udowodnij, że:

$$\frac{AM \cdot AN}{AB \cdot AC} + \frac{BM \cdot BN}{BA \cdot BC} + \frac{CM \cdot CN}{CA \cdot CB} = 1.$$