.... ☐ Warsztaty weekendowe.
imię i nazwisko klasa nr telefonu

Test kwalifikacyjny na III Warsztaty Matematyczne

Na pytania odpowiada się „tak" lub „nie" poprzez wpisanie odpowiednio „**T**" bądź „**N**" w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi „tak" i „nie". W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **−1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Niech $x = 2002^{2003} + 2003^{2002}$.

☐ Liczba x jest podzielna przez 3.
☐ Liczba x jest podzielna przez 7.
☐ Liczba x^4 jest podzielna przez 5.

2. Rozważmy szachownicę kwadratową o boku n ($n \geqslant 4$). W jej rogu stoi konik szachowy. Czy tenże konik

☐ dla dowolnego n może dojść na każde pole szachownicy?
☐ dla dowolnego n może obejść wszystkie pola szachownicy, będąc na każdym polu dokładnie raz i wrócić na pole startowe?
☐ dla $n = 1001$ może dojść do przeciwnego rogu w co najwyżej 667 ruchach?

3*. Czy dla każdej liczby całkowitej dodatniej $n > 1$ istnieje wielokąt F, który

☐ ma dokładnie n osi symetrii?
☐ ma środek symetrii nie mając osi symetrii?
☐ ma dokładnie $2n$ wierzchołków i dokładnie n osi symetrii?

4. Na płaszczyźnie dane są różne punkty A, B, C, D, z których żadne trzy nie są współliniowe. Aby leżały na jednym okręgu wystarcza, by

- [ ] $|\measuredangle ADB| = |\measuredangle ACB|$.
- [ ] $|\measuredangle ACB| + |\measuredangle ADB| = 180^\circ$.
- [ ] środki okręgów opisanych na trójkątach $\triangle ABC, \triangle ABD, \triangle ACD, \triangle BCD$ były współliniowe.

5. W przestrzeni dane są różne punkty A, B, C, D. Na to, aby leżały one na jednej sferze

- [ ] potrzeba, by nie były współpłaszczyznowe.
- [ ] wystarcza, by nie były współpłaszczyznowe.
- [ ] wystarcza, by leżały na jednym okregu.

6. Równanie $a^2x^2 + ax - 2 = 0$

- [ ] ma dwa różne rozwiązania rzeczywiste dla każdej liczby rzeczywistej a.
- [ ] ma przynajmniej jedno rozwiązanie rzeczywiste dla każdej liczby rzeczywistej a.
- [ ] jeżeli ma jakiekolwiek rozwiązania rzeczywiste, to ma rozwiązania dodatnie.

7. Na płaszczyźnie dany jest trójkąt ABC. Punkt H jest jego ortocentrum, punkt S – jego środkiem ciężkości, punkt O – środkiem opisanego na nim okręgu, punkt I – środkiem okręgu wpisanego. Aby trójkąt ABC był równoboczny wystarcza, by

- [ ] $I = H$.
- [ ] $S = O$.
- [ ] $I = O$.

8. Przecinając czworościan foremny płaszczyzną w przekroju można otrzymać

- [ ] trójkąt nierównoramienny.
- [ ] trapez nierównoramienny.
- [ ] pięciokąt.

9*. Czy prawdą jest, że dla $n > k > 0$

- [ ] $\binom{n}{k} \Big| \binom{2n}{2k}$?
- [ ] $\binom{n}{k} \Big| \binom{n}{k+1}\binom{n+1}{k}$?
- [ ] dla nieskończenie wielu liczb n zachodzi $\binom{n}{7} \Big| \binom{n}{10}$?

10. Iloczyn $n \geqslant 3$ różnych liczb pierwszych może

- [ ] mieć więcej niż n dzielników.
- [ ] być mniejszy od $2^{(n-1)} \cdot n!$.
- [ ] być iloczynem dwóch kolejnych liczb naturalnych.

11. Zbiór punktów przestrzeni zadanych nierównością $x^2 + y^2 + z^2 \leqslant max\{x, y, z\}$

- [ ] jest zawarty w pewnej kuli o promieniu 1.
- [ ] zawiera kulę o środku w punkcie $(0, 0, 0)$ i promieniu $\frac{1}{2}$.
- [ ] jest prostopadłościanem.

12. Dany jest ciąg liczb naturalnych zdefiniowany wzorami: $a_1 = 1$ i $a_{n+1} = 3a_n + 4$ dla $n = 1, 2, 3, \ldots$. Czy w tym ciągu

- [ ] istnieje wyraz podzielny przez 13?
- [ ] istnieje wyraz postaci $x^2 - 1$, gdzie $x \in \mathbb{N}$?
- [ ] istnieje nieskończenie wiele wyrazów podzielnych przez 7?

13. Niech F będzie n-kątem wypukłym ($n \geqslant 5$).

- [ ] Może istnieć $(n-2)$-elementowy podzbiór zbioru jego przekątnych, w którym żadne dwie się nie przecinają (zakładamy, że dwie przekątne wychodzące z tego samego wierzchołka się nie przecinają).
- [ ] Może istnieć co najmniej $\frac{n^4}{24}$ różnych punktów, będących przecięciami co najmniej dwóch przekątnych F.
- [ ] Niech A będzie pewnym $(n-3)$-elementowym podzbiorem zbioru przekątnych F, w którym żadne dwie się nie przecinają. Czy dla każdej przekątnej X wielokąta F spoza zbioru A istnieje przekątna ze zbioru A, która nie przecina X?

14. Obszar zadany nierównościami: $y > 3x^2 - 1$ i $y < -x^2 + 1$ jest

- [ ] wypukły.
- [ ] nieograniczony.
- [ ] środkowosymetryczny.

15*. Funkcję f nazywamy *parzystą*, jeżeli dla każdego x zachodzi $f(x) = f(-x)$. Dla dowolnej funkcji f

- [ ] $f(f(x))$ jest funkcją parzystą.
- [ ] $f(|x|)$ jest funkcją parzystą.
- [ ] $|f(x)|$ jest funkcją parzystą.

16. Na parkingu stoi n gangsterów, odległości między nimi są różne. W samo południe każdy gangster strzelił do tego z pozostałych, który stał najbliżej niego. Zginęło k gangsterów (gangster strzela zawsze w środek czoła i zabija). Czy jest możliwe, aby

- [ ] $n = 6$ i $k = 1$?
- [ ] $n = 9$ i $k = 2$?
- [ ] $n = 11$ i $k = 3$?

17. Od godziny 00:01 do godziny 00:01 następnego dnia wskazówki minutowa i godzinowa zegara

- [ ] pokrywają się 22 razy.
- [ ] pokrywają się 24 razy.
- [ ] tworzą kąt prosty mniej niż 46 razy.

18. W wielomianie $(x^2 + x - 1)^n$

- [ ] suma wszystkich współczynników jest zawsze nieujemna.
- [ ] suma współczynników przy parzystych potęgach może być ujemna.
- [ ] suma współczynników przy nieparzystych potęgach może być równa zero.

19. Niech $f(x, y) = x^2+xy+y^2$. Liczby rzeczywiste a, b, c spełniają warunki $a+b+c = 0$, $b = \sqrt{ac}$. Wówczas

- [ ] $f(a, b) + f(b, c) \geqslant f(a, c)$.
- [ ] $f(a, b) + f(b, c) \leqslant f(a, c)$.
- [ ] $\frac{1}{3}\Big(f(a, b) + f(b, c) + f(c, a)\Big) = -(ab + bc + ca)$.

20. Liczby dodatnie a, b, c spełniają warunek $a + b + c = 1$. Wtedy

- [ ] $ab + bc + ca \leqslant \frac{1}{3}$.
- [ ] $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geqslant 9$.
- [ ] $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant \frac{1}{3}$.

21*. Czy długości boków trójkąta prostokątnego mogą być

- [ ] wszystkie liczbami pierwszymi?
- [ ] kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego?
- [ ] wszystkie liczbami całkowitymi, które są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego i najmniejsza z nich jest niepodzielna przez 3?

22. Liczba x jest niewymierna. Wtedy

☐ liczba $x^2 + x$ też musi być niewymierna.
☐ istnieje taka liczba całkowita $n > 1$, że x^n jest liczbą niewymierną.
☐ liczba $x + \frac{1}{x}$ może być wymierna.

23*. W trójkącie ABC na bokach BC, AC, AB obrano odpowiednio takie punkty D, E i F, że trójkąty ABC, AEF, DBF, DEC są podobne (podobieństwo jest tutaj zapisane z uwzględnieniem kolejności wierzchołków).

☐ Dla dowolnego $\triangle ABC$ tak wybrane punkty D, E, F mogą być spodkami wysokości.
☐ Dla dowolnego $\triangle ABC$ tak wybrane punkty D, E, F muszą być spodkami wysokości.
☐ Istnieje taki $\triangle ABC$, że tak wybrane punkty D, E, F są środkami jego boków.

24. Funkcję $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nazywamy *okresową*, jeśli istnieje taka niezerowa liczba a, że dla każdego x zachodzi $f(x + a) = f(x)$.

☐ Funkcja $f(x) = sinx \cdot cosx$ jest okresowa.
☐ Istnieje wielomian okresowy stopnia co najmniej 1.
☐ Funkcja $f(x) = \frac{sin^2x+1}{2}$ jest okresowa.

25*. W pewnym państwie jest n miast. Pomiędzy niektórymi z nich są drogi, przy czym dla dowolnie wybranych trzech miast istnieje dokładnie jedna lub dokładnie dwie z trzech możliwych łączących je dróg. Jest możliwe, aby

☐ $n = 4$.
☐ $n = 5$.
☐ $n = 6$.

26. W turnieju gry w kropki startuje 2^n osób ($n \geqslant 3$). Gra odbywa się systemem pucharowym. Dla dowolnych dwóch osób wiadomo z góry, jaki będzie wynik pojedynku między nimi oraz wiadomo, że jeśli osoba A wygrywa z osobą B i B wygrywa z C, to A wygrywa z C. Jeszcze nie rozlosowano kto z kim gra.

☐ Co najmniej dwie osoby mają szansę na pierwsze miejsce.
☐ Więcej niż 2^{n-1} osób może zająć drugie miejsce (dojść do finału i w nim przegrać).
☐ Dokładnie $2^{n-1} + 2^{n-2} + 1$ osób może zająć czwarte miejsce lub lepsze (mecz o trzecie miejsce odbywa się pomiędzy osobami, które odpadły w półfinałach).

27. Dla pewnego wielomianu trzeciego stopnia $W(x)$ funkcja $f(x) = |W(x)|$ przyjmuje wartość 1 dla sześciu argumentów $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6$.

☐ Taki wielomian $W(x)$ istnieje dla dowolnych liczb a_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.
☐ Wielomian $W(x)$ musi mieć miejsce zerowe w przedziale (a_1, a_3).
☐ Wielomian $W(x)$ może mieć miejsce zerowe w przedziale (a_4, a_5).

28. Suma $\sum_{i=1}^{n} i^5$ jest równa

☐ $\sum_{i=2n}^{3n}(i-2n)^5$.
☐ $\frac{1}{6}(n+1)^6 - \frac{1}{2}(n+1)^5 + \frac{5}{12}(n+1)^4 - \frac{1}{12}(n+1)^2$.
☐ $-120 + 294n - \frac{1083}{4}n^2 + \frac{245}{2}n^3 - \frac{115}{4}n^4 + 4n^5$.

29. Rozpatrzmy następujący warunek: istnieje taki ciąg geometryczny (a_k), że liczby $a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, a wszystkie dalsze wyrazy ciągu: $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ nie są całkowite. Wówczas

☐ tylko liczba $n = 1$ spełnia ten warunek.
☐ nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich nie spełnia tego warunku.
☐ każda dodatnia całkowita liczba n spełnia ten warunek.

30*. Spośród wszystkich funkcji $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcja $f(x) = x$ jest jedyną funkcją, dla której dla dowolnych $x, y \in \mathbb{R}$

☐ $f(x-y) \cdot f(x+y) = x^2 - y^2$.
☐ $f(x) + f(y) = f(x+y)$.
☐ $f(x) \cdot f(y) = f(xy)$.