Kółko z okazji 3 grudnia

03.12.2009

1. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $x,\ a_1,\ a_2, \ldots,\ a_n$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a_1+x}+\frac{a_1}{(a_1+x)(a_2+x)}+...+\frac{a_1a_2...a_{n\ \ 1}}{(a_1+x)(a_2+x)...(a_n+x)}<\frac{1}{x}.$$

2. Punkty D i E leżą odpowiednio na bokach BC i AC trójkąta ABC. Odcinki AD i BE przecinają się w punkcie P. Punkty K i L leżą odpowiednio na bokach BC i AC, przy czym czworokąt $CLPK$ jest równoległobokiem. Dowieść, że:

$$\frac{AE}{EL}=\frac{BD}{DK}.$$

3. Wykazać, że dla dowolnych liczb dodatnich $a,\ b,\ c$ zachodzi nierówność:

$$\frac{1}{a(1+b)}+\frac{1}{b(1+c)}+\frac{1}{c(1+a)}\geqslant\frac{3}{1+abc}.$$

4. Rozwiązać równanie:

$$(x^{2n}+y^{2n}+z^{2n})^2=2(x^{4n}+y^{4n}+z^{4n})$$

w liczbach całkowitych dodatnich $(x,\ y,\ z)$.