Zadania nieco trudniejsze niż inne do rozwiązywania w wolnych chwilach.

1. Udowodnij, że dla dowolnego $n > 3$ każdy czworokąt wpisywalny w koło daje się rozbić na n czworokątów wpisywalnych w koło.

2. Wykaż, że dla dowolnej liczby naturalnej n niepodzielnej przez 2 ani przez 5 istnieje taka jej wielokrotność, która w zapisie dziesiętnym składa się z samych jedynek.

3. Punkty P i Q znajdują się wewnątrz trójkąta ostrokątnego $\triangle ABC$, przy czym $|\angle BAP| = |\angle QAC|$ oraz $|\angle ABP| = |\angle QBC|$. Okrąg o średnicy CP przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach K i L; okrąg o średnicy CQ przecina boki AC i BC odpowiednio w punktach N i M. Udowodnij, że na czworokącie $KLMN$ można opisać okrąg.

4. Niech $A = (a_{ij})$, gdzie $i, j = 1, 2, \ldots, n$ jest kwadratową tablicą zawierającą w i-tym wierszu i j-tej kolumnie liczbę a_{ij}, przy czym wszystkie a_{ij} są całkowite nieujemne. Dla każdego i, j takiego, że $a_{ij} = 0$, suma liczb w i-tym wierszu i j-tej kolumnie jest co najmniej n. Udowodnij, że suma wszystkich liczb w tablicy wynosi przynajmniej $\frac{n^2}{2}$.

5. Na płaszczyźnie danych jest 100 punktów, z których żadne trzy nie leżą na jednej prostej. Rozpatrujemy wszystkie trójkąty o wierzchołkach w tych punktach. Udowodnij, że wśród nich jest co najwyżej 70% trójkątów ostrokątnych.

6. a) Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ zachodzi podzielność $(n!)^{n+1} | (n^2)!$
6. b) Znajdź wszystkie liczby naturalne $n \geqslant 2$, dla których zachodzi podzielność $(n!)^{n+2} | (n^2)!$
6. c) Znajdź taką liczbę naturalną $n \geqslant 2$, że zachodzi podzielność $(n!)^{n+3} | (n^2)!$

7. Dane są liczby wymierne $a_1, \ldots, a_{2n+1}$ spełniające warunek: jeśli pominiemy którąkolwiek z nich, to pozostałe można podzielić na 2 grupy po n liczb w ten sposób, że sumy liczb z obu grup są równe. Wykaż, że $a_1 = a_2 = \ldots = a_{2n+1}$.

8. Rozważmy nieskończoną szachownicę o ponumerowanych liczbami całkowitymi wierszach i kolumnach. W kolumnach o numerach niedodatnich na każdym polu stoi pion. Ruch polega na wybraniu dwóch sąsiadujących w wierszu lub kolumnie pionów, a następnie przeskoczeniem jednym z nich przez drugi i zdjęciem drugiego. Ruch wolno wykonać tylko o ile pole, na które skaczemy, jest puste. Udowodnij, że w skończonej liczbie ruchów nie da się doprowadzić żadnego z pionów do piątej kolumny.

9. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ oraz okrąg S opisany na nim. Punkt P leży na tym łuku AB, na którym nie leży punkt C. O_1 i O_2 to środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $\triangle APC$ i $\triangle BPC$. Wykaż, że istnieje punkt T, przez który, niezależnie od położenia punktu P, przechodzi okrąg opisany na trójkącie O_1O_2P.

10. Udowodnij, że jeśli w grupie n osób każde dwie mają dokładnie jednego wspólnego znajomego, to istnieje wśród nich osoba, która zna wszystkich.