Sprawdzian na koniec warsztatów

grupa młodsza

sobota, 29 września 2001

91. Punkty D, E, F sa środkami odpowiednio boków BC, AC i AB trójkąta ABC. Wykaż, że środek okręgu wpisanego w $\triangle DEF$, środek ciężkości $\triangle ABC$ i punkt przecięcia się dwusiecznych $\triangle ABC$ leżą na jednej prostej.

92. Udowodnij, że dla liczb dodatnich a, b i c zachodzi nierówność

$$2(a^3 + b^3 + c^3) \geqslant ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a).$$

93. Proste k i l, przechodzące przez wierzchołki odpowiednio B i C trójkąta ABC, przecinają się na wysokości AD. Prosta k przecina bok AC w punkcie E, prosta l przecina bok AB w punkcie F. Prosta m, zawierająca punkt A i równoległa do BC, przecina prostą DE w punkcie P i prostą DF w punkcie Q. Wykaż, że trójkąt DPQ jest równoramienny.

94. Udowodnij, że jeżeli liczba $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez 9, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi, to co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.

95. Ile różnych dziewięcioliterowych wyrazów (ciągów liter) można ułożyć z liter występujących w wyrazie "rezerwuar" (literę "e" liczymy dwukrotnie, "r" - trzykrotnie)?

96. Udowodnij, że jeżeli dla każdej wartości x zachodzi równość

$$f(x + a) = \frac{1 + f(x)}{1 - f(x)},$$

gdzie $a \neq 0$ jest ustaloną liczbą, to funkcja $f(x)$ jest okresowa.

97. Dany jest okrąg o oraz dwa różne punkty A i B. Skonstruuj okrąg przechodzący przez punkty A i B, styczny do okręgu o.

98. Udowodnij, że nie istnieje wielomian o współczynnikach całkowitych, który przyjmuje dokładnie w jednym punkcie całkowitym wartość parzystą.

Sprawdzian na koniec warsztatów

grupa starsza

sobota, 29 września 2001

94. Udowodnij, że jeżeli liczba $a^3+b^3+c^3$ jest podzielna przez 9, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi, to co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.

97. Dany jest okrąg o oraz dwa różne punkty A i B. Skonstruuj okrąg przechodzący przez punkty A i B, styczny do okręgu o.

99. Ile jest permutacji zbioru n-elementowego mających dokładnie k punktów stałych? Wynik przedstaw w postaci sumy co najwyżej $n+1$ składników.

910. Dany jest odcinek AB oraz prosta k równoległa do niego. Posługując się jedynie linijką podziel odcinek AB na dwie równe części.

911. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takie że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$(x-y)f(x+y)-(x+y)f(x-y)=4xy(x^2-y^2).$$

912. Na trójkącie ABC opisany jest okrąg o środku O_1. Punkty D i E są odpowiednio środkami tych łuków AB i AC, które nie zawierają trzeciego wierzchołka trójkąta. Punkt O_2 jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkty F i G są jego punktami styczności odpowiednio z bokami AB i AC. Wykaż, że proste DF, EG oraz O_1O_2 przecinają się w jednym punkcie.

914. Niech α, β i γ będą miarami kątów trójkąta ostrokątnego. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność

$$2(\frac{\sin\alpha}{\alpha}+\frac{\sin\beta}{\beta}+\frac{\sin\gamma}{\gamma}) \leqslant (\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma})\sin\alpha+(\frac{1}{\gamma}+\frac{1}{\alpha})\sin\beta+(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta})\sin\gamma.$$

915. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, \ldots, x_k$ oraz dowolnych rzeczywistych $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$, $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_k$ spełniających $\alpha_1 \geqslant \beta_1, \alpha_1+\alpha_2 \geqslant \beta_1+\beta_2, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1}\alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k-1}\beta_i$ oraz $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i = \sum_{i=1}^{k}\beta_i$ zachodzi następująca nierówność:

$$\sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\alpha_1}\cdot x_2^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{\alpha_k} \geqslant \sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\beta_1}\cdot x_2^{\beta_2}\cdot\ldots\cdot x_k^{\beta_k}.$$

Sprawdzian na koniec warsztatów

grupa najstarsza

sobota, 29 września 2001

911. Znajdź wszystkie różnowartościowe funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ spełniające dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ równość

$$f(f(x) + y) = f(x + y) + 1.$$

913. Niech $n \geqslant 1$ będzie liczbą całkowitą. Dany jest zbiór B oraz jego podzbiory $A_1, A_2, \ldots, A_{2n+1}$. Zakładamy, że:
(i) do każdego zbioru A_i należy dokładnie $2n$ elementów;
(ii) do każdego zbioru $A_i \cap A_j$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n+1)$ należy dokładnie jeden element;
(iii) każdy element zbioru B należy do co najmniej dwóch zbiorów A_i.

Dla jakich wartości n można przyporządkować każdemu elementowi zbioru B jedną z liczb 0, 1 tak, aby w każdym ze zbiorów A_i liczba 0 była przyporządkowana dokładnie n jego elementom?

915. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, \ldots, x_k$ oraz dowolnych rzeczywistych $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$, $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_k$ spełniających $\alpha_1 \geqslant \beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \beta_1 + \beta_2, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i$ oraz $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ zachodzi następująca nierówność:

$$\sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \geqslant \sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\beta_k}.$$

916. Punkt D jest rzutem punktu P należącego do wnętrza trójkąta ABC na bok BC i należy do jego wnętrza. Punkty E i F leżą odpowiednio na bokach AC i AB trójkąta ABC. Wykaż, że jeśli proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie oraz $\measuredangle EDF = 90^\circ$, to $\measuredangle PDE = \measuredangle FDA$.

917. Dane są rozłączne zewnętrznie okręgi o_1, o_2 i punkt A leżący na zewnątrz tych okręgów. Skonstruuj taki okrąg o, aby jego punkty styczności z o_1 i o_2 oraz punkt A były współliniowe.

918. Niech $a_1, a_2, \ldots, a_n$ oraz $p \geqslant 2$ będą liczbami rzeczywistymi, zaś Υ zbiorem wszystkich funkcji $\epsilon : \{1, \ldots, n\} \to \{-1, 1\}$. Ponadto niech dla każdego $\epsilon \in \Upsilon$ sumy $\epsilon(1)a_1 + \epsilon(2)a_2 + \ldots + \epsilon(n)a_n$ będą różne od 0. Udowodnij nierówność

$$\sum_{\epsilon \in \Upsilon} |\epsilon(1)a_1 + \epsilon(2)a_2 + \ldots + \epsilon(n)a_n|^p \geqslant 2^n (\sum_{i=1}^{n} a_i^2)^{\frac{p}{2}}.$$

919. Dana jest prosta k oraz rozłączne zewnętrznie okręgi O_1, O_2 leżące po tej samej stronie prostej k. Skonstruuj okrąg styczny do k, O_1, O_2.

920. Prostokąt został podzielony na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Wykaż, że przynajmniej jeden bok dużego prostokąta ma długość całkowitą.