

Potęga punktu względem okręgu

1. Dany jest odcinek PB i punkt A należący do tego odcinka. Znajdź zbiór punktów stycznych okręgów przechodzących przez A i B do prostych przechodzących przez punkt P , stycznych do tych okręgów.
2. Na kartce narysowany jest łuk okręgu, którego środek leży poza kartką. Przez dany punkt P , leżący na tej kartce, poprowadź proste styczne do tego łuku.
3. Punkty A, B, C, D leżą na jednej prostej, w tej właśnie kolejności. Przez punkty A i B prowadzimy okrąg o_1 , przez punkty C i D prowadzimy okrąg o_2 . Okręgi te przecinają się w punktach E i F . Wykaż, że przy ustalonych punktach A, B, C, D , dla wszystkich par okręgów o_1 i o_2 proste EF przechodzą przez stały punkt.
4. Sześciokąt wypukły $ABCDEF$ spełnia warunki: $AB = BC, CD = DE, EF = FA$. Wykaż, że proste zawierające wysokości trójkątów BCD, DEF, FAB , poprowadzone odpowiednio z wierzchołków C, E, A , przecinają się w jednym punkcie.
5. Dany jest okrąg o oraz różne punkty A, B, S , nie należące do tego okręgu. Skonstruuj taki okrąg o_1 , przechodzący przez punkty A i B , przecinający okrąg o , by punkt S był współliniowy z punktami przecięcia okręgów o i o_1 .
6. Punkt P należy do wnętrza koła k . Opisz na kole k taki trapez równoramienny, by jego przekątne przecinały się w punkcie P .

Elipsa

1. Znajdź zbiór obrazów ogniska elipsy w symetriach względem prostych stycznych do tej elipsy.
2. Znajdź zbiór rzutów prostokątnych ogniska elipsy na proste styczne do tej elipsy.
3. Okręgi $o_1 = o(A, r_1)$ i $o_2 = o(B, r_2)$ są rozłączne wewnątrznie. Znajdź zbiór środków okręgów wewnątrznie stycznych do jednego z tych okręgów, a zewnątrznie stycznych do drugiego.
4. Wykaż, że iloczyn odległości ognisk danej elipsy od prostej stycznej do tej elipsy nie zależy od wyboru stycznej.
5. Znajdź zbiór punktów, z których daną elipsę widać pod kątem prostym.
6. W trójkącie ABC punkt O jest środkiem okręgu opisanego, punkt H – ortocentrum. Udowodnij, że na bokach AB, BC, CA istnieją odpowiednio takie punkty F, E, D , że $OD + DH = OE + EH = OF + FH$.