Pierwsza łatwa seria powtórzeniowa

grupa młodsza

środa, 26 września 2001

41. Udowodnij, że

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1) = n^2.$$

42. Udowodnij, że

$$2^k\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

43. Liczby $a_1, a_2, \ldots, a_n$ są dodatnie, $n \geqslant 2$. Udowodnij, że $\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_3} + \ldots + \frac{a_n}{a_1} \geqslant n$.

44. Na ile sposobów można usadzić przy okrągłym stole uczestników warsztatów (33 osoby) tak, żeby Marcin Pilipczuk nie siedział obok Wojtka Czerwińskiego?

Uwaga: Utożsamiamy obroty stołu.

45. Mamy 4 kawałki papieru. Jeden z nich rozdzieramy na 4 części, otrzymując w sumie 7 kawałków, następnie jeden z tych 7 znów rozdzieramy na 4 i tak dalej. Czy możemy w ten sposób otrzymać 2001 kawałków papieru?

46. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $8p^2 + 1$ jest liczbą pierwszą.

47. Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^{q-1} + q^{p-1}$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez pq.

48. Dany jest trójkąt ABC oraz dwa okręgi O_1 i O_2 styczne zewnętrznie w punkcie T, styczne do boku BC oraz takie, że O_1 jest styczny do boku AC i O_2 jest styczny do boku AB. Prosta BT przecina okrąg O wpisany w trójkąt ABC w punktach P_1 i P_2, przy czym P_1 należy do odcinka BP_2. Prosta CT przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punktach Q_1 i Q_2, przy czym Q_1 należy do odcinka CQ_2. Wykaż, że P_2Q_2 jest średnicą okręgu O.

49. Dany jest trójkąt ABC oraz dodatnia liczba a. Wpisz w ten trójkąt taki prostokąt o stosunku boków a, by jego dwa sąsiednie wierzchołki należały do boku AB, a pozostałe wierzchołki należały odpowiednio do boków BC i CA.

Pierwsza łatwa seria powtórzeniowa

grupa starsza

środa, 26 września 2001

46. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $8p^2 + 1$ jest liczbą pierwszą.

47. Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^{q-1} + q^{p-1}$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez pq.

410. Liczby całkowite dodatnie a, b spełniają warunki: $a|b^2, b^2|a^3, a^3|b^4$,itd. Udowodnij, że wówczas $a = b$.

48. Dany jest trójkąt ABC oraz dwa okręgi O_1 i O_2 styczne zewnętrznie w punkcie T, styczne do boku BC oraz takie, że O_1 jest styczny do boku AC i O_2 jest styczny do boku AB. Prosta BT przecina okrąg O wpisany w trójkąt ABC w punktach P_1 i P_2, przy czym P_1 należy do odcinka BP_2. Prosta CT przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punktach Q_1 i Q_2, przy czym Q_1 należy do odcinka CQ_2. Wykaż, że P_2Q_2 jest średnicą okręgu O.

49. Dany jest trójkąt ABC oraz dodatnia liczba a. Wpisz w ten trójkąt taki prostokąt o stosunku boków a, by jego dwa sąsiednie wierzchołki należały do boku AB, a pozostałe wierzchołki należały odpowiednio do boków BC i CA.

411. Niech H będzie ortocentrum trójkąta $\triangle ABC$, a punkty O_1, O_2, O_3 – środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$. Wykaż, że proste AO_1, BO_2, CO_3 przecinają się w jednym punkcie.

42. Udowodnij, że

$$2^k \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{n-i}{k-i}.$$

412. Uczestnicy i kadra warsztatów (40 osób) chcą usiąść przy kwadratowym stole (na każdym boku jest 10 miejsc). Na ile sposobów mogą usiąść tak, aby Marcin Pilipczuk nie siedział obok Wojtka Czerwińskiego?

Uwagi:
(a) usadzenia różniące się tylko obrotem stołu o 90° uznajemy za tożsame;
(b) dwa miejsca przy jednym rogu uznajemy za sąsiednie.

413. W pewnym głosowaniu "Samoobrona" otrzymała p głosów, a "Liga Polskich Rodzin" q głosów, przy czym $p > q$. Wykaż, że prawdopodobieństwo, iż w trakcie obliczania głosów było cały czas:
(a) więcej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin" jest równe $\frac{p-q}{p+q}$;
(b) nie mniej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin" jest równe $\frac{p+1-q}{p+1}$.

Zadania powtórzeniowe i nie tylko

grupa najstarsza

środa, 26 września 2001

411. Niech H będzie ortocentrum trójkąta $\triangle ABC$, a punkty O_1, O_2, O_3 – środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$. Wykaż, że proste AO_1, BO_2, CO_3 przecinają się w jednym punkcie.

414. W pewnym głosowaniu "Samoobrona" otrzymała p głosów, a "Liga Polskich Rodzin" q głosów, przy czym $p > q$. Oblicz prawdopodobieństwa, iż w trakcie obliczania głosów było cały czas:
(a) więcej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin";
(b) nie mniej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin".

415. Dany jest trójkąt ABC. W kąty przy wierzchołkach A i B wpisz dwa przystające, zewnętrznie styczne okręgi.

416. Ciągi a_n i b_n zadane są następującymi wzorami: $a_1 = \sqrt{2}$, $b_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{-\sqrt{4-(a_n)^2}+2}$, $b_{n+1} = \frac{2\sqrt{4+(b_n)^2}-4}{b_n}$. Udowodnij, że istnieje stała $c \in \mathbb{R}$ taka, że $|a_n - b_n| < c \cdot 8^{-n}$.

417. Trójkąt równoboczny podzielono na 9 000 000 przystających trójkątów równobocznych prostymi równoległymi do jego boków. Każdy wierzchołek każdego małego trójkąta pokolorowano na jeden z trzech kolorów. Udowodnij, że istnieją trzy punkty tego samego koloru, które są wierzchołkami trójkąta o bokach równoległych do boków pierwotnego trójkąta.