# Pierwsze zawody drużynowe

grupa młodsza

środa, 26 września 2001

**51.** Czy istnieje trójkąt nieprostokątny, który można podzielić na 5 trójkątów podobnych do niego?

**52.** Niech $n, k$ będą liczbami całkowitymi dodatnimi, $n \geqslant k$. Na ile sposobów można $k$ różnym osobom rozdać $n$ identycznych ciasteczek tak, by każdy dostał co najmniej jedno ciasteczko?

**53.** W trójkącie o bokach $a, b, c$ długości środkowych opuszczonych odpowiednio na te boki oznaczmy przez $m_a, m_b, m_c$. Udowodnij, że $m_b\ c + m_c\ b \geqslant 2\ m_a\ a$.

**54.** Trójkąt $ABC$ jest wpisany w okrąg $S_1$. Styczna do okręgu $S_1$ w punkcie $A$ przecina prostą $BC$ w punkcie $D$. Okrąg $S_2$ jest styczny do prostej $BC$ w punkcie $D$ i przechodzi przez punkt $A$. Punkt $E$ jest drugim (oprócz $A$) punktem przecięcia okręgów $S_1$ i $S_2$. Udowodnij, że $\frac{EB}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

**55.** W klasie siedzi 33 uczniów. Co minutę dwoje z nich zamienia się miejscami. Czy jest możliwe, aby pod koniec lekcji (po 45 zamianach) każdy siedział na tym samym miejscu, co na początku?

**56.** Podziel kwadrat na 8 trójkątów ostrokątnych.

**57.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y, z$

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geqslant \sqrt{6(x+y+z)}.$$

**58.** Niech $k, n$ będą ustalonymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Oblicz

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

**59.** Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna $n$ da się przedstawić jako suma wziętych z $+$ lub $-$ $k$-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k,$$

$x_i \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że: $4 \leqslant v(3)$.

**511.** Rozpatrujemy rozkłady szachownicy $8 \times 8$ na $p$ nie zachodzących na siebie prostokątów spełniające następujące warunki:

(a) Każdy prostokąt składa się z pewnej liczby pól szachownicy, przy czym liczba pól białych równa jest liczbie pól czarnych.

(b) Jeżeli $a_i$ jest liczbą pól w $i$-tym prostokącie, to $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

Znajdź największą wartość $p$, przy której jest możliwy taki rozkład i wyznacz dla tej wartości $p$ wszystkie ciągi $a_1, a_2, \ldots, a_p$, dla których można taki rozkład zrealizować.

## Pierwsze zawody drużynowe

grupa starsza

środa, 26 września 2001

**57.** Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x, y, z$

$$\sqrt{x^2+1}+\sqrt{y^2+1}+\sqrt{z^2+1} \geqslant \sqrt{6(x+y+z)}.$$

**58.** Niech $k, n$ będą ustalonymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Oblicz

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

**511.** Rozpatrujemy rozkłady szachownicy $8 \times 8$ na $p$ nie zachodzących na siebie prostokątów spełniające następujące warunki:

(a) Każdy prostokąt składa się z pewnej liczby pól szachownicy, przy czym liczba pól białych równa jest liczbie pól czarnych.

(b) Jeżeli $a_i$ jest liczbą pól w $i$-tym prostokącie, to $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

Znajdź największą wartość $p$, przy której jest możliwy taki rozkład i wyznacz dla tej wartości $p$ wszystkie ciągi $a_1, a_2, \ldots, a_p$, dla których można taki rozkład zrealizować.

**512.** Prostokąt został podzielony na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Wykaż, że przynajmniej jeden bok dużego prostokąta ma długość całkowitą.

**513.** Pewien obszar leśny podzielono na 100 działek rekreacyjnych o tej samej powierzchni. Jednocześnie strażacy podzielili ten obszar inaczej na 100 sektorów o tej samej powierzchni. Udowodnij, że można na tym obszarze wykopać 100 studni tak, by na każdej działce i w każdym sektorze była jedna z nich (studnia jest punktem i nie może znajdować się na żadnej linii podziału).

**514.** Na stole bilardowym w kształcie trójkąta, którego miary kątów są współmierne pchnięto kulę z pewnego punktu wewnętrznego. Kula odbija się od ścian zgodnie z prawem "kąt padania równy kątowi odbicia". Udowodnij, że liczba kierunków w jakich może się poruszać kula jest skończona (zakładamy, że kula nie trafia w wierzchołek trójkąta). Siłę tarcia oraz wymiary kuli pomijamy.

**515.** Niech $p$ będzie liczbą pierwszą większą od 2, $k$ liczbą naturalną taką, że $0 < k < p-1$. Udowodnij, że liczba

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k$$

dzieli się przez $p$.

**516.** Punkty $A$ i $B$ leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez punkty $C$ i $D$. Skonstruuj taki punkt $M$ leżący na prostej $CD$, że kąt $\angle AMC$ jest dwa razy większy od kąta $\angle BMD$.

**517.** Okrąg $S$ jest styczny do ramion kąta o wierzchołku $A$ w punktach $B$ i $C$. Na półprostej $AB^{\rightarrow}$ obieramy poza odcinkiem $AB$ dowolny punkt $D$. Niech $P$ będzie punktem przecięcia okręgu $S$ z okręgiem opisanym na $\triangle ACD$ różnym od $C$, zaś punkt $Q$ rzutem prostokątnym punktu $B$ na prostą $CD$. Udowodnij, że $|\angle DPQ| = 2 \cdot |\angle ADC|$.

**518.** Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna $n$ da się przedstawić jako suma wziętych z $+$ lub $-$ $k$-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k,$$

$x_i \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że: $4 \leqslant v(3) \leqslant 5$.

## Pierwsze zawody drużynowe

grupa najstarsza

środa, 26 września 2001

**512.** Prostokąt został podzielony na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Wykaż, że przynajmniej jeden bok dużego prostokąta ma długość całkowitą.

**513.** Pewien obszar leśny podzielono na 100 działek rekreacyjnych o tej samej powierzchni. Jednocześnie strażacy podzielili ten obszar inaczej na 100 sektorów o tej samej powierzchni. Udowodnij, że można na tym obszarze wykopać 100 studni tak, by na każdej działce i w każdym sektorze była jedna z nich (studnia jest punktem i nie może znajdować się na żadnej linii podziału).

**514.** Na stole bilardowym w kształcie trójkąta, którego miary kątów są współmierne pchnięto kulę z pewnego punktu wewnętrznego. Kula odbija się od ścian zgodnie z prawem "kąt padania równy kątowi odbicia". Udowodnij, że liczba kierunków w jakich może się poruszać kula jest skończona (zakładamy, że kula nie trafia w wierzchołek trójkąta). Siłę tarcia oraz wymiary kuli pomijamy.

**515.** Niech $p$ będzie liczbą pierwszą większą od 2, $k$ liczbą naturalną taką, że $0 < k < p-1$. Udowodnij, że liczba

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k$$

dzieli się przez $p$.

**516.** Punkty $A$ i $B$ leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez punkty $C$ i $D$. Skonstruuj taki punkt $M$ leżący na prostej $CD$, że kąt $\angle AMC$ jest dwa razy większy od kąta $\angle BMD$.

**517.** Okrąg $S$ jest styczny do ramion kąta o wierzchołku $A$ w punktach $B$ i $C$. Na półprostej $AB^{\rightarrow}$ obieramy poza odcinkiem $AB$ dowolny punkt $D$. Niech $P$ będzie punktem przecięcia okręgu $S$ z okręgiem opisanym na $\triangle ACD$ różnym od $C$, zaś punkt $Q$ rzutem prostokątnym punktu $B$ na prostą $CD$. Udowodnij, że $|\angle DPQ| = 2 \cdot |\angle ADC|$.

**518.** Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna $n$ da się przedstawić jako suma wziętych z $+$ lub $-$ $k$-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k,$$

$x_i \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że: $4 \leqslant v(3) \leqslant 5$.

**519.** Dane są liczby naturalne $k, n$ takie, że $0 < k < \frac{n^2}{4}$ oraz $k$ nie ma dzielnika pierwszego większego niż $n$. Udowodnij, że $k|n!$.

**520.** Ciąg $(a_n)$ zadany jest następującymi wzorami: $a_1 = \sqrt{2}$, $a_{n+1} = \sqrt{-\sqrt{4-(a_n)^2}+2}$. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} 2^n a_n.$$

**521.** Dla każdej liczby rzeczywistej dodatniej $x_1$ określamy ciąg $x_1, x_2, x_3, \ldots$ przyjmując $x_{n+1} = x_n(x_n + (1/n))$ dla $n \geqslant 1$. Udowodnić, że istnieje dokładnie jedna wartość $x_1$ taka, że nierówności $0 < x_n < x_{n+1} < 1$ zachodzą dla każdego $n$.