Pierwsze zawody indywidualne

grupa starsza

niedziela, 23 września 2001

13. Niech a będzie liczbą całkowitą, n – liczbą naturalną > 1. Wykaż, że liczba $\sqrt[n]{a}$ jest wymierna wtedy i tylko wtedy, gdy jest całkowita.

14. Na bokach trójkąta $\triangle ABC$ zbudowano na zewnątrz trójkąty równoboczne $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$.

a) Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ i $\triangle CAE$ są wierzchołkami trójkąta równobocznego.

b) Udowodnij, że proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie P.

c) Wykaż, że $|AP| + |BP| + |CP| \leqslant |AR| + |BR| + |CR|$ dla każdego punktu R.

15. Dana jest funkcja $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, dla której $f(n + 1) > f(f(n))$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Udowodnij, że $f(n) = n$ dla każdego n.

16. Rozważamy wszystkie r-elementowe podzbiory zbioru $1, \ldots, n$ $(r \in \mathbb{N}, 1 \leqslant r \leqslant n)$. W każdym z nich wybieramy liczbę najmniejszą. Udowodnić, że średnia arytmetyczna tych liczb jest równa $\frac{n+1}{r+1}$.

Drugie zawody indywidualne - dzień pierwszy

grupa starsza

poniedziałek, 24 września 2001

21. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x + y = xy$.

23. Dana jest liczba rzeczywista a. Udowodnij, że jeżeli liczba $a + \frac{1}{a}$ jest całkowita, to dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $a^n + \frac{1}{a^n}$ jest całkowita.

25. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ tworzą równoległobok.

27. *Punktem kratowym* nazywamy punkt płaszczyzny mający obie współrzędne całkowite. Dowieść, że na płaszczyźnie nie można umieścić trójkąta równobocznego tak, aby jego wierzchołki były w punktach kratowych.

28. Dany jest zbiór M złożony z 2001 różnych liczb całkowitych dodatnich, z których żadna nie dzieli się przez liczbę pierwszą większą od 27. Udowodnić, że ze zbioru M można wybrać cztery różne liczby, których iloczyn jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

29. Rozważamy następującą grę jednoosobową: pozycja w grze składa się ze skończonego zbioru zaznaczonych punktów kratowych i ze skończonego zbioru zaznaczonych odcinków, które muszą spełniać następujące warunki:

a) końce każdego zaznaczonego odcinka są zaznaczonymi punktami kratowymi;

b) każdy zaznaczony odcinek jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych lub do jednej z dwóch prostych o równaniach $y = x$, $y = -x$;

c) każdy zaznaczony odcinek zawiera dokładnie 5 punktów kratowych i każdy z tych punktów jest zaznaczony;

d) dowolne dwa zaznaczone odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Ruch w grze polega na zaznaczeniu nowego punktu kratowego, a następnie zaznaczeniu nowego odcinka w taki sposób, by powstała nowa pozycja w grze. Rozstrzygnij, czy istnieje taka pozycja początkowa w grze, że możliwe jest wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.

Drugie zawody indywidualne - dzień drugi

grupa starsza

wtorek, 25 września 2001

34. Udowodnij, że dla liczb całkowitych $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\ 2^{n-2}.$$

35. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek x, y, z liczb całkowitych, spełniających równanie $x^2 + y^2 - z^2 = 2001$.

36. Na bokach równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz kwadraty. Udowodnij, że ich środki tworzą kwadrat.

37. Udowodnij, że dowolną liczbę wymierną można przedstawić jako sumę ułamków prostych, tzn. ułamków nieskracalnych o mianownikach będących potęgami liczb pierwszych.

38. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów mających obie współrzędne całkowite. Czy można pokolorować pewne punkty tego zbioru na czerwono, a pozostałe na biało, w taki sposób, że dla każdej prostej ℓ równoległej do którejkolwiek osi układu współrzędnych wartość bezwzględna różnicy między liczbą punktów białych i czerwonych na prostej ℓ jest nie większa od 1?

39. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg S_1. Styczna do okręgu S_1 w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Okrąg S_2 jest styczny do prostej BC w punkcie D i przechodzi przez punkt A. Punkt E jest drugim (oprócz A) punktem przecięcia okręgów S_1 i S_2. Udowodnij, że $\frac{EB}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

Pierwsza łatwa seria powtórzeniowa

grupa starsza

środa, 26 września 2001

46. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p takie, że $8p^2 + 1$ jest liczbą pierwszą.

47. Niech p i q będą różnymi liczbami pierwszymi. Udowodnij, że liczba $p^{q-1} + q^{p-1}$ daje resztę 1 przy dzieleniu przez pq.

410. Liczby całkowite dodatnie a, b spełniają warunki: $a|b^2, b^2|a^3, a^3|b^4$,itd. Udowodnij, że wówczas $a = b$.

48. Dany jest trójkąt ABC oraz dwa okręgi O_1 i O_2 styczne zewnętrznie w punkcie T, styczne do boku BC oraz takie, że O_1 jest styczny do boku AC i O_2 jest styczny do boku AB. Prosta BT przecina okrąg O wpisany w trójkąt ABC w punktach P_1 i P_2, przy czym P_1 należy do odcinka BP_2. Prosta CT przecina okrąg wpisany w trójkąt ABC w punktach Q_1 i Q_2, przy czym Q_1 należy do odcinka CQ_2. Wykaż, że P_2Q_2 jest średnicą okręgu O.

49. Dany jest trójkąt ABC oraz dodatnia liczba a. Wpisz w ten trójkąt taki prostokąt o stosunku boków a, by jego dwa sąsiednie wierzchołki należały do boku AB, a pozostałe wierzchołki należały odpowiednio do boków BC i CA.

411. Niech H będzie ortocentrum trójkąta $\triangle ABC$, a punkty O_1, O_2, O_3 – środkami okręgów opisanych odpowiednio na trójkątach $\triangle BHC, \triangle CHA, \triangle AHB$. Wykaż, że proste AO_1, BO_2, CO_3 przecinają się w jednym punkcie.

42. Udowodnij, że

$$2^k\binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$

412. Uczestnicy i kadra warsztatów (40 osób) chcą usiąść przy kwadratowym stole (na każdym boku jest 10 miejsc). Na ile sposobów mogą usiąść tak, aby Marcin Pilipczuk nie siedział obok Wojtka Czerwińskiego?

Uwagi:
(a) usadzenia różniące się tylko obrotem stołu o 90° uznajemy za tożsame;
(b) dwa miejsca przy jednym rogu uznajemy za sąsiednie.

413. W pewnym głosowaniu "Samoobrona" otrzymała p głosów, a "Liga Polskich Rodzin" q głosów, przy czym $p > q$. Wykaż, że prawdopodobieństwo, iż w trakcie obliczania głosów było cały czas:

(a) więcej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin" jest równe $\frac{p-q}{p+q}$;
(b) nie mniej głosów na "Samoobronę" niż na "Ligę Polskich Rodzin" jest równe $\frac{p+1-q}{p+1}$.

Pierwsze zawody drużynowe

grupa starsza

środa, 26 września 2001

57. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich x, y, z

$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geqslant \sqrt{6(x+y+z)}.$$

58. Niech k, n będą ustalonymi liczbami całkowitymi dodatnimi. Oblicz

$$\sum_{n_1+\ldots+n_k=n} \frac{n!}{n_1! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

511. Rozpatrujemy rozkłady szachownicy 8×8 na p nie zachodzących na siebie prostokątów spełniające następujące warunki:

(a) Każdy prostokąt składa się z pewnej liczby pól szachownicy, przy czym liczba pól białych równa jest liczbie pól czarnych.

(b) Jeżeli a_i jest liczbą pól w i-tym prostokącie, to $a_1 < a_2 < \ldots < a_p$.

Znajdź największą wartość p, przy której jest możliwy taki rozkład i wyznacz dla tej wartości p wszystkie ciągi $a_1, a_2, \ldots, a_p$, dla których można taki rozkład zrealizować.

512. Prostokąt został podzielony na mniejsze prostokąty, z których każdy ma co najmniej jeden bok o długości będącej liczbą całkowitą. Wykaż, że przynajmniej jeden bok dużego prostokąta ma długość całkowitą.

513. Pewien obszar leśny podzielono na 100 działek rekreacyjnych o tej samej powierzchni. Jednocześnie strażacy podzielili ten obszar inaczej na 100 sektorów o tej samej powierzchni. Udowodnij, że można na tym obszarze wykopać 100 studni tak, by na każdej działce i w każdym sektorze była jedna z nich (studnia jest punktem i nie może znajdować się na żadnej linii podziału).

514. Na stole bilardowym w kształcie trójkąta, którego miary kątów są współmierne pchnięto kulę z pewnego punktu wewnętrznego. Kula odbija się od ścian zgodnie z prawem "kąt padania równy kątowi odbicia". Udowodnij, że liczba kierunków w jakich może się poruszać kula jest skończona (zakładamy, że kula nie trafia w wierzchołek trójkąta). Siłę tarcia oraz wymiary kuli pomijamy.

515. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 2, k liczbą naturalną taką, że $0 < k < p-1$. Udowodnij, że liczba

$$\sum_{i=1}^{p-1} i^k$$

dzieli się przez p.

516. Punkty A i B leżą po tej samej stronie prostej wyznaczonej przez punkty C i D. Skonstruuj taki punkt M leżący na prostej CD, że kąt $\angle AMC$ jest dwa razy większy od kąta $\angle BMD$.

517. Okrąg S jest styczny do ramion kąta o wierzchołku A w punktach B i C. Na półprostej $AB^{\rightarrow}$ obieramy poza odcinkiem AB dowolny punkt D. Niech P będzie punktem przecięcia okręgu S z okręgiem opisanym na $\triangle ACD$ różnym od C, zaś punkt Q rzutem prostokątnym punktu B na prostą CD. Udowodnij, że $|\angle DPQ| = 2 \cdot |\angle ADC|$.

518. Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna n da się przedstawić jako suma wziętych z $+$ lub $-$ k-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k,$$

$x_i \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że: $4 \leqslant v(3) \leqslant 5$.

Trzecie zawody indywidualne

grupa starsza

czwartek, 27 września 2001

61. Liczby $a_1, \ldots, a_5$ są całkowite, liczby $b_1, \ldots, b_5$ to pewna ich permutacja. Udowodnij, że liczba $(a_1 - b_1) \ldots (a_5 - b_5)$ jest parzysta.

63. Na płaszczyźnie danych jest n prostych. Wykaż, że pola, na które te proste dzielą płaszczyznę, można pomalować dwoma kolorami w taki sposób, by żadne dwie figury sąsiadujące ze sobą wzdłuż odcinka (albo półprostej lub prostej) nie były pomalowane tym samym kolorem.

64. W trapezie $ABCD$ boki AB oraz CD są równoległe, proste zawierające boki AD i BC przecinają się w punkcie O, przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkty M i N są środkami odpowiednio boków CD i AB. Udowodnij, że punkty O, M, E, N są współliniowe.

65. Wykaż, że jeżeli p jest liczbą pierwszą większą od 5, to $p \mid 5^p - 2 \cdot 3^p + 1$.

66. Udowodnij, że środkiem ciężkości obwodu trójkąta jest środek okręgu wpisanego w trójkąt utworzony przez środki jego boków.

67. Wykaż, że jeżeli n jest liczbą nieparzystą, to $n \mid 2^{n!} - 1$.

Druga łatwa seria powtórzeniowa

grupa starsza

czwartek, 27 września 2001

73. Okręgi dopisane do trójkąta ABC są styczne do boków BC, CA i AB odpowiednio w punktach P, Q i R. Wykaż, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

75. Wielomian $W(x) = a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ ma współczynniki całkowite. Udowodnij, że nie jest możliwe, by $W(7) = 11$ i jednocześnie $W(11) = 13$.

76. Niech a będzie liczbą całkowitą, p liczbą pierwszą nieparzystą. Udowodnij, że istnieje para liczb całkowitych (x, y) spełniająca warunki: $(x, y) \neq (0, 0),\ p \mid ax - y,\ |x| \leqslant [\sqrt{p}], |y| \leqslant [\sqrt{p}]$.

77. W trójkącie ABC punkt D jest spodkiem wysokości poprowadzonej z wierzchołka A. Punkty E i F leżą odpowiednio na prostych AC i AB, przy czym proste BE i CF przecinają się na wysokości AD. Wykaż, że $\measuredangle ADE = \measuredangle ADF$.

78. Udowodnij, że dla dowolnych $a, b, c, d \in \mathbb{R}^+$, dla których $abcd = 2001$, zachodzi nierówność:

$$3\left(\frac{a^2b^2c^2}{d} + \frac{a^2b^2d^2}{c} + \frac{a^2c^2d^2}{b} + \frac{b^2c^2d^2}{a}\right) \geqslant$$

$$\geqslant a^2b^2c + a^2bc^2 + ab^2c^2 + a^2b^2d + a^2bd^2 + ab^2d^2 + a^2c^2d + a^2cd^2 + ac^2d^2 + b^2c^2d + b^2cd^2 + bc^2d^2.$$

79. Dany jest zbiór S złożony z n elementów. Niech $M_1, M_2, \ldots, M_{n+1}$ będą niepustymi podbiorami zbioru S. Wykaż, że istnieją takie dwa różne niepuste podzbiory A i B zbioru $\{1, 2, \ldots, n+1\}$, że

$$\bigcup_{k \in A} M_k = \bigcup_{k \in B} M_k.$$

Drugie zawody drużynowe

grupa starsza

piątek, 28 września 2001

84. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkt F jest ortocentrum $\triangle EBC$, punkt G jest ortocentrum $\triangle EAD$. Udowodnij, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez E i prostopadłej do AB.

810. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geqslant \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}.$$

813. Wysokość przestrzenna czworościanu to odcinek łączący wierzchołek z jego rzutem prostopadłym na przeciwległą ścianę. Udowodnij, że wszystkie pary przeciwległych krawędzi są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wysokości przestrzenne przecinają się w jednym punkcie.

814. Dane jest $n > 2$ punktów na płaszczyźnie. d to największa odległość między dwoma spośród tych punktów. Udowodnij, że wśród nich istnieje najwyżej n par punktów odległych o d.

815. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych dodatnich przez równania: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ oraz: $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$,

$f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$ dla wszystkich liczb całkowitych $n > 0$. Ile jest liczb całkowitych n spełniających warunki $0 < n \leqslant 1988$ oraz $f(n) = n$?

816. Zbuduj okrąg przechodzący przez dany punkt oraz styczny do danej prostej i do danego okręgu.

817. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg o wszystkich trzech wierzchołkach jednego koloru.

818. Niech $r(n)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $n = x^2 + y^2$ w liczbach całkowitych. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(1) + r(2) + \ldots + r(n)}{n}.$$

819. *Prostokąt łaciński* $m \times n$ $(m \leqslant n)$ to m wierszy po n liczb ustawionych tak, że każdy wiersz to pewna permutacja liczb od 1 do n oraz w każdej kolumnie liczby są parami różne. Wykaż, że dowolny prostokąt łaciński $m \times n$, $m < n$ można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego $n \times n$.

820. O jest środkiem okręgu o promieniu r, wpisanego w trójkąt ABC, promień okręgu opisanego na tym trójkącie równy jest R. Udowodnij, że dla każdej prostej k przechodzącej przez punkt O, która przecina okrąg opisany w punktach A' i B', zachodzi równość: $A'O \cdot BO' = 2Rr$.

821. Znajdź wszystkie ściśle rosnące funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe, monotoniczne i takie, że $f(1) = 1$ oraz $f(f(x)) = (f(x))^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

822. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym.

823. Karol i Wojtek grają w następującą grę: na polach nieskończonej szachownicy na zmianę stawiają swoje pionki. Na jednym polu może stać co najwyżej jeden pion. Gracz wygrywa, jeżeli istnieje na planszy kwadrat 2 na 2, na którego każdym polu stoi jego pion. Pierwszy ruch wykonuje Wojtek. Czy dla któregoś z graczy istnieje strategia wygrywająca?

Sprawdzian na koniec warsztatów

grupa starsza

sobota, 29 września 2001

94. Udowodnij, że jeżeli liczba $a^3 + b^3 + c^3$ jest podzielna przez 9, gdzie a, b, c są liczbami naturalnymi, to co najmniej jedna z nich jest podzielna przez 3.

97. Dany jest okrąg o oraz dwa różne punkty A i B. Skonstruuj okrąg przechodzący przez punkty A i B, styczny do okręgu o.

99. Ile jest permutacji zbioru n-elementowego mających dokładnie k punktów stałych? Wynik przedstaw w postaci sumy co najwyżej $n+1$ składników.

910. Dany jest odcinek AB oraz prosta k równoległa do niego. Posługując się jedynie linijką podziel odcinek AB na dwie równe części.

911. Znajdź wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, takie że dla każdego $x, y \in \mathbb{R}$ spełniona jest równość

$$(x-y)f(x+y) - (x+y)f(x-y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

912. Na trójkącie ABC opisany jest okrąg o środku O_1. Punkty D i E są odpowiednio środkami tych łuków AB i AC, które nie zawierają trzeciego wierzchołka trójkąta. Punkt O_2

jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, a punkty F i G są jego punktami styczności odpowiednio z bokami AB i AC. Wykaż, że proste DF, EG oraz O_1O_2 przecinają się w jednym punkcie.

914. Niech α, β i γ będą miarami kątów trójkąta ostrokątnego. Udowodnij, że prawdziwa jest nierówność

$$2(\frac{\sin\alpha}{\alpha} + \frac{\sin\beta}{\beta} + \frac{\sin\gamma}{\gamma}) \leqslant (\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma})\sin\alpha + (\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\alpha})\sin\beta + (\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta})\sin\gamma.$$

915. Udowodnij, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich $x_1, \ldots, x_k$ oraz dowolnych rzeczywistych $\alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_k$, $\beta_1 \geqslant \ldots \geqslant \beta_k$ spełniających $\alpha_1 \geqslant \beta_1, \alpha_1 + \alpha_2 \geqslant \beta_1 + \beta_2, \ldots, \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} \beta_i$ oraz $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \sum_{i=1}^{k} \beta_i$ zachodzi następująca nierówność:

$$\sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\alpha_k} \geqslant \sum_{SYM}^{x_1,\ldots,x_k} x_1^{\beta_1} \cdot x_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot x_k^{\beta_k}.$$