Drugie zawody indywidualne - dzień pierwszy

grupa młodsza

poniedziałek, 24 września 2001

21. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x + y = xy$.

22. Dana jest kwadratowa szachownica o k^2 polach. Na narożnym polu tej szachownicy stoi wieża. Wykaż, że jeśli ta wieża może przejść ze swojego rogu do rogu przeciwległego, przechodząc przez każde pole szachownicy dokładnie raz, to k jest liczbą nieparzystą.

23. Dana jest liczba rzeczywista a. Udowodnij, że jeżeli liczba $a + \frac{1}{a}$ jest całkowita, to dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $a^n + \frac{1}{a^n}$ jest całkowita.

24. Oblicz pole trójkąta o bokach długości $\sqrt{5}, \sqrt{13}$ i $\sqrt{26}$.

25. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ tworzą równoległobok.

26. Wykaż, że dla liczb rzeczywistych $0 \leqslant a \leqslant 1$ i $0 \leqslant b \leqslant 1$ prawdziwa jest nierówność

$$(a + b + 1)^2 \geqslant 4 \cdot (a^{2001} + b^{2001}).$$

Drugie zawody indywidualne - dzień pierwszy

grupa starsza

poniedziałek, 24 września 2001

21. Rozwiąż w liczbach naturalnych równanie $x + y = xy$.

23. Dana jest liczba rzeczywista a. Udowodnij, że jeżeli liczba $a + \frac{1}{a}$ jest całkowita, to dla dowolnej liczby całkowitej n liczba $a^n + \frac{1}{a^n}$ jest całkowita.

25. Niech P będzie dowolnym punktem wewnątrz czworokąta wypukłego $ABCD$. Udowodnij, że środki ciężkości trójkątów $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ tworzą równoległobok.

27. *Punktem kratowym* nazywamy punkt płaszczyzny mający obie współrzędne całkowite. Dowieść, że na płaszczyźnie nie można umieścić trójkąta równobocznego tak, aby jego wierzchołki były w punktach kratowych.

28. Dany jest zbiór M złożony z 2001 różnych liczb całkowitych dodatnich, z których żadna nie dzieli się przez liczbę pierwszą większą od 27. Udowodnić, że ze zbioru M można wybrać cztery różne liczby, których iloczyn jest czwartą potęgą liczby całkowitej.

29. Rozważamy następującą grę jednoosobową: pozycja w grze składa się ze skończonego zbioru zaznaczonych punktów kratowych i ze skończonego zbioru zaznaczonych odcinków, które muszą spełniać następujące warunki:

a) końce każdego zaznaczonego odcinka są zaznaczonymi punktami kratowymi;

b) każdy zaznaczony odcinek jest równoległy do jednej z osi układu współrzędnych lub do jednej z dwóch prostych o równaniach $y = x,\ y = -x$;

c) każdy zaznaczony odcinek zawiera dokładnie 5 punktów kratowych i każdy z tych punktów jest zaznaczony;

d) dowolne dwa zaznaczone odcinki mają co najwyżej jeden punkt wspólny.

Ruch w grze polega na zaznaczeniu nowego punktu kratowego, a następnie zaznaczeniu nowego odcinka w taki sposób, by powstała nowa pozycja w grze. Rozstrzygnij, czy istnieje taka pozycja początkowa w grze, że możliwe jest wykonanie nieskończonego ciągu ruchów.