Drugie zawody indywidualne - dzień drugi

grupa młodsza

wtorek, 25 września 2001

31. Niech x będzie 2001-cyfrową liczbą naturalną podzielną przez 9, a – sumą cyfr x, b – sumą cyfr a, c – sumą cyfr b. Oblicz c.

32. Dana jest szachownica 8 x 8. Czy da się na niej ustawić pewną liczbę pionków tak, aby na każdej z 30 przekątnych stała nieparzysta ich liczba?

33. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boku AC w punkcie D, odcinek DE jest średnicą tego okręgu. Prosta BE przecina bok AC w punkcie F. Wykazać, że $AF = CD$.

34. Udowodnij, że dla liczb całkowitych $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\ 2^{n-2}.$$

35. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek x, y, z liczb całkowitych, spełniających równanie $x^2 + y^2 - z^2 = 2001$.

36. Na bokach równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz kwadraty. Udowodnij, że ich środki tworzą kwadrat.

Drugie zawody indywidualne - dzień drugi

grupa starsza

wtorek, 25 września 2001

34. Udowodnij, że dla liczb całkowitych $n > 1$

$$\sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)\ 2^{n-2}.$$

35. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek x, y, z liczb całkowitych, spełniających równanie $x^2 + y^2 - z^2 = 2001$.

36. Na bokach równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz kwadraty. Udowodnij, że ich środki tworzą kwadrat.

37. Udowodnij, że dowolną liczbę wymierną można przedstawić jako sumę ułamków prostych, tzn. ułamków nieskracalnych o mianownikach będących potęgami liczb pierwszych.

38. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów mających obie współrzędne całkowite. Czy można pokolorować pewne punkty tego zbioru na czerwono, a pozostałe na biało, w taki sposób, że dla każdej prostej ℓ równoległej do którejkolwiek osi układu współrzędnych wartość bezwzględna różnicy między liczbą punktów białych i czerwonych na prostej ℓ jest nie większa od 1 ?

39. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg S_1. Styczna do okręgu S_1 w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Okrąg S_2 jest styczny do prostej BC w punkcie D i przechodzi przez punkt A. Punkt E jest drugim (oprócz A) punktem przecięcia okręgów S_1 i S_2. Udowodnij, że $\frac{EB}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

Drugie zawody indywidualne - dzień drugi

grupa najstarsza

wtorek, 25 września 2001

35. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele trójek x, y, z liczb całkowitych, spełniających równanie $x^2 + y^2 - z^2 = 2001$.

36. Na bokach równoległoboku $ABCD$ zbudowano na zewnątrz kwadraty. Udowodnij, że ich środki tworzą kwadrat.

37. Udowodnij, że dowolną liczbę wymierną można przedstawić jako sumę ułamków prostych, tzn. ułamków nieskracalnych o mianownikach będących potęgami liczb pierwszych.

38. Na płaszczyźnie dany jest skończony zbiór punktów mających obie współrzędne całkowite. Czy można pokolorować pewne punkty tego zbioru na czerwono, a pozostałe na biało, w taki sposób, że dla każdej prostej ℓ równoległej do którejkolwiek osi układu współrzędnych wartość bezwzględna różnicy między liczbą punktów białych i czerwonych na prostej ℓ jest nie większa od 1?

39. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg S_1. Styczna do okręgu S_1 w punkcie A przecina prostą BC w punkcie D. Okrąg S_2 jest styczny do prostej BC w punkcie D i przechodzi przez punkt A. Punkt E jest drugim (oprócz A) punktem przecięcia okręgów S_1 i S_2. Udowodnij, że $\frac{EB}{EC} = \frac{AB^3}{AC^3}$.

310. Udowodnij, że dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej m istnieje taki skończony zbiór S punktów płaszczyzny, że dla dowolnego punktu $A \in S$ istnieje w zbiorze S dokładnie m punktów odległych o 1 od A.