Drugie zawody drużynowe

grupa młodsza

piątek, 28 września 2001

81. Na okręgu napisano n liczb naturalnych. Między każdymi dwiema sąsiednimi liczbami wpisujemy ich największy wspólny dzielnik, po czym wcześniej napisane liczby ścieramy. Z nowo otrzymanymi n liczbami postępujemy analogicznie. Udowodnij, że po skończonej liczbie takich ruchów wszystkie liczby na okręgu będą równe.

82. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n istnieje taka jej wielokrotność, która w zapisie dziesiętnym składa się z samych zer i jedynek.

83. Czy równanie $a^2 - 5b^2 = 3$ ma rozwiązania w liczbach całkowitych a, b?

84. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkt F jest ortocentrum $\triangle EBC$, punkt G jest ortocentrum $\triangle EAD$. Udowodnij, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez E i prostopadłej do AB.

85. Niech $v(k)$ oznacza minimalną liczbę naturalną taką, że dowolna liczba naturalna n da się przedstawić jako suma wziętych z $+$ lub $-$ k-tych potęg liczb całkowitych, tzn.

$$n = \sum_{i=1}^{v(k)} \pm x_i^k, \; x_i \in \mathbb{Z}.$$

Udowodnij, że $v(3) \leqslant 5$.

86. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg o wszystkich trzech wierzchołkach jednego koloru.

87. Udowodnij, że dla $a, b, c, d \in \mathbb{R}_+$

$$a + b + c + d \leqslant \frac{abc}{d^2} + \frac{bcd}{a^2} + \frac{cda}{b^2} + \frac{dab}{c^2}.$$

88. Okrąg O jest styczny do prostej k w punkcie D. Cięciwa AB tego okręgu jest równoległa do k, punkt C należy do k. Odcinki AC i BC przecinają okrąg O odpowiednio w punktach E i F. Wykaż, że prosta EF przechodzi przez środek odcinka CD.

89. Udowodnij, że jeśli x, y, z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x + y + z = 1$, to

$$\frac{x}{1+x} + \frac{y}{1+y} + \frac{z}{1+z} \leqslant \frac{3}{4}.$$

810. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geqslant \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}.$$

811. Udowodnij, że iloczyn liczb, z których każda jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych, również jest sumą kwadratów dwóch liczb naturalnych.

812. Niektóre ściany wypukłego wielościanu pomalowano na czerwono, resztę na biało w taki sposób, że żadne dwie ściany tego samego koloru nie mają wspólnej krawędzi. Udowodnij, że jeśli suma pól ścian czerwonych jest różna od sumy pól ścian białych, to w ten wielościan nie da się wpisać sfery.

Drugie zawody drużynowe

grupa starsza

piątek, 28 września 2001

84. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkt F jest ortocentrum $\triangle EBC$, punkt G jest ortocentrum $\triangle EAD$. Udowodnij, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez E i prostopadłej do AB.

810. Udowodnij, że dla dowolnych liczb dodatnich $x_1, x_2, \ldots, x_n,\ y_1, y_2, \ldots, y_n$ zachodzi nierówność

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i y_i} \geqslant \frac{4n^2}{\sum_{i=1}^{n}(x_i + y_i)^2}.$$

813. Wysokość przestrzenna czworościanu to odcinek łączący wierzchołek z jego rzutem prostopadłym na przeciwległą ścianę. Udowodnij, że wszystkie pary przeciwległych krawędzi są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy wysokości przestrzenne przecinają się w jednym punkcie.

814. Dane jest $n > 2$ punktów na płaszczyźnie. d to największa odległość między dwoma spośród tych punktów. Udowodnij, że wśród nich istnieje najwyżej n par punktów odległych o d.

815. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych dodatnich przez równania: $f(1) = 1$, $f(3) = 3$ oraz: $f(2n) = f(n)$, $f(4n+1) = 2f(2n+1) - f(n)$, $f(4n+3) = 3f(2n+1) - 2f(n)$ dla wszystkich liczb całkowitych $n > 0$. Ile jest liczb całkowitych n spełniających warunki $0 < n \leqslant 1988$ oraz $f(n) = n$?

816. Zbuduj okrąg przechodzący przez dany punkt oraz styczny do danej prostej i do danego okręgu.

817. Każdy punkt okręgu pomalowano na jeden z dwóch kolorów. Udowodnij, że istnieje trójkąt równoramienny wpisany w ten okrąg o wszystkich trzech wierzchołkach jednego koloru.

818. Niech $r(n)$ oznacza liczbę rozwiązań równania $n = x^2 + y^2$ w liczbach całkowitych. Oblicz

$$\lim_{n\to\infty} \frac{r(1) + r(2) + \ldots + r(n)}{n}.$$

819. *Prostokąt łaciński* $m \times n$ $(m \leqslant n)$ to m wierszy po n liczb ustawionych tak, że każdy wiersz to pewna permutacja liczb od 1 do n oraz w każdej kolumnie liczby są parami różne. Wykaż, że dowolny prostokąt łaciński $m \times n,\ m < n$ można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego $n \times n$.

820. O jest środkiem okręgu o promieniu r, wpisanego w trójkąt ABC, promień okręgu opisanego na tym trójkącie równy jest R. Udowodnij, że dla każdej prostej k przechodzącej przez punkt O, która przecina okrąg opisany w punktach A' i B', zachodzi równość: $A'O \cdot BO' = 2Rr$.

821. Znajdź wszystkie ściśle rosnące funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ciągłe, monotoniczne i takie, że $f(1) = 1$ oraz $f(f(x)) = (f(x))^2$ dla $x \in \mathbb{R}$.

822. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym.

823. Karol i Wojtek grają w następującą grę: na polach nieskończonej szachownicy na zmianę stawiają swoje pionki. Na jednym polu może stać co najwyżej jeden pion. Gracz wygrywa, jeżeli istnieje na planszy kwadrat 2 na 2, na którego każdym polu stoi jego pion. Pierwszy ruch wykonuje Wojtek. Czy dla któregoś z graczy istnieje strategia wygrywająca?

Drugie zawody drużynowe

grupa najstarsza

piątek, 28 września 2001

89. Udowodnij, że jeśli x, y, z są takimi liczbami nieujemnymi, że $x+y+z=1$, to

$$\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y}+\frac{z}{1+z}\leqslant\frac{3}{4}.$$

814. Dane jest $n>2$ punktów na płaszczyźnie. d to największa odległość między dwoma spośród tych punktów. Udowodnij, że wśród nich istnieje najwyżej n par punktów odległych o d.

815. Funkcja f jest określona w zbiorze liczb całkowitych dodatnich przez równania: $f(1)=1$, $f(3)=3$ oraz: $f(2n)=f(n)$, $f(4n+1)=2f(2n+1)-f(n)$, $f(4n+3)=3f(2n+1)-2f(n)$ dla wszystkich liczb całkowitych $n>0$. Ile jest liczb całkowitych n spełniających warunki $0<n\leqslant 1988$ oraz $f(n)=n$?

816. Zbuduj okrąg przechodzący przez dany punkt oraz styczny do danej prostej i do danego okręgu.

819. *Prostokąt łaciński* $m\times n$ $(m\leqslant n)$ to m wierszy po n liczb ustawionych tak, że każdy wiersz to pewna permutacja liczb od 1 do n oraz w każdej kolumnie liczby są parami różne. Wykaż, że dowolny prostokąt łaciński $m\times n$, $m<n$ można rozszerzyć do kwadratu łacińskiego $n\times n$.

820. O jest środkiem okręgu o promieniu r, wpisanego w trójkąt ABC, promień okręgu opisanego na tym trójkącie równy jest R. Udowodnij, że dla każdej prostej k przechodzącej przez punkt O, która przecina okrąg opisany w punktach A' i B', zachodzi równość: $A'O\cdot BO'=2Rr$.

822. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n istnieje n kolejnych liczb naturalnych, z których żadna nie jest potęgą liczby pierwszej o wykładniku całkowitym.

824. Udowodnij, że liczba $\frac{5^{10005}(2001!)^{10000}-1}{5^{2001}(2001!)^{2000}-1}$ jest złożona.

825. Danych jest n kartoników, każdy z jednej strony pomalowany na czerwono, a z drugiej na niebiesko. Kartoniki te rozkładamy dowolnie na okręgu. Jeden ruch polega na odwróceniu dowolnych trzech leżących obok siebie kartoników na drugą stronę. Wyznacz wszystkie takie wartości n, dla których z dowolnego początkowego układu kolorów da się dojść do każdego innego.

826. Wykaż, że wielomian $(x+1)^n+x^n+1$ jest podzielny przez wielomian x^2+x+1 wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą parzystą niepodzielną przez 3.

827. Dany jest trójkąt $\triangle ABC$ oraz okrąg S opisany na nim. Punkt P leży na tym łuku AB, na którym nie leży punkt C. O_1 i O_2 to środki okręgów wpisanych odpowiednio w trójkąty $\triangle APC$ i $\triangle BPC$. Wykaż, że istnieje punkt T, przez który, niezależnie od położenia punktu P, przechodzi okrąg opisany na trójkącie O_1O_2P.