Test kwalifikacyjny na II Warsztaty Matematyczne

Na pytania odpowiada się "tak" lub "nie" poprzez wpisanie odpowiednio "**T**" bądź "**N**" w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi "tak" i "nie". W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. W wielomianie $(1+x)^{17}$ największy współczynnik liczbowy występuje przy

☐ x^8;
☐ x^9;
☐ x^{10}.

2. Równanie $x^2-(m+n)x+mn=0$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi, ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

☐ gdy mn nie jest kwadratem liczby całkowitej;
☐ gdy $m \neq n$;
☐ zawsze.

3. Na szachownicy 8×8 stoi jedna figura szachowa. Liczba ruchów, które może wykonać, nie zależy od miejsca, na którym stoi, jeżeli jest to

☐ hetman;
☐ wieża;
☐ skoczek.

4. Dany jest ciąg (a_n) taki, że dla pewnego rzeczywistego i różnego od zera k ciąg (ka_n) jest arytmetyczny. Wtedy

☐ (a_n) jest arytmetyczny;
☐ ciąg (na_n) jest arytmetyczny;
☐ dla każdego l ciąg (la_n) jest arytmetyczny.

5. Funkcję f nazywamy parzystą, jeżeli dla każdego x zachodzi $f(x)=f(-x)$. Dla dowolnej funkcji f:

☐ $f(x^2)$ jest funkcją parzystą;
☐ $(f(x))^2$ jest funkcją parzystą;
☐ $f(x)+f(-x)+1$ jest funkcją parzystą.

6. Dla $n, k \in \mathbb{N}$

- [ ] $\binom{n+1}{k+1} \geqslant \binom{n}{k}$;
- [ ] $\binom{n+1}{k} \geqslant \binom{n}{k+1}$;
- [ ] $\binom{n}{k+1} \geqslant \binom{n+1}{k}$.

7. Nierówność $a^3 > a^5$ jest prawdziwa dla

- [ ] $a < 0$;
- [ ] $0 < a < 1$;
- [ ] $a < -1$

8*. Najmniejszą wysokością danego trójkąta jest h. Wówczas:

- [ ] żaden bok nie jest krótszy niż h;
- [ ] któryś bok może być równy h;
- [ ] najkrótsza środkowa jest nie mniejsza niż h.

9. Kwadrat można podzielić na:

- [ ] 3 trójkąty o równych polach;
- [ ] 2000 trójkątów przystających;
- [ ] 2000 pięciokątów o równych polach.

10. Przecinając sześcian płaszczyzną można w przekroju otrzymać:

- [ ] trapez nie będący równoległobokiem;
- [ ] romb nie będący kwadratem;
- [ ] czworokąt nie będący trapezem.

11*. Jeżeli $k|\ l$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l > 1$, to

- [ ] $2^k - 1|\ 2^l - 1$;
- [ ] $k^k|\ l^l$;
- [ ] $k^k - 1|\ l^l - 1$.

12. Wielościan wypukły ma zawsze

☐ dwie ściany o tej samej liczbie boków;
☐ mniej wierzchołków niż krawędzi;
☐ objętość nie większą niż pole największej ściany pomnożone przez największą odległość między dwoma wierzchołkami.

13. Suma skończenie wielu liczb

☐ wymiernych może być niewymierna;
☐ niewymiernych może być wymierna;
☐ których moduł jest większy od 1 musi być większa od 1.

14*. Czy dla każdej liczby naturalnej n po liczbie jej dzielników można stwierdzić, czy jest ona

☐ liczbą pierwszą?
☐ kwadratem pewnej liczby naturalnej?
☐ sześcianem pewnej liczby naturalnej?

15. W Lolandii są w obiegu tylko banknoty o nominale 21 L. oraz monety o nominale 12 L. Można zatem kupić telewizor o cenie:

☐ 12345 L.;
☐ 123456 L.;
☐ 1234567 L.

16. Istnieje taki trójkąt prostokątny, że:

☐ iloczyn długości boków i wysokości jest większy niż $\pi^2 \cdot S^3$, gdzie S to pole tego trójkąta;
☐ suma długości średnic okręgów wpisanego i opisanego jest mniejsza niż suma długości przyprostokątnych;
☐ $a^6 + b^6 > c^6$, gdzie a, b - długości przyprostokątnych, c - długość przeciwprostokątnej.

17*. W każdym trójkącie:

☐ suma długości wysokości jest mniejsza od sumy długości boków;
☐ suma długości środkowych jest mniejsza od sumy długości boków;
☐ ze środkowych można zbudować trójkąt.

18. $2|x| = |x+1| + |x-1|$ dla $x \in \mathbb{R}$ jeśli

- [ ] $|x| > 1$;
- [ ] $|x+1| > |x-1|$;
- [ ] $\frac{|x-1|}{|x+1|+2} \geqslant 1$.

19*. Dana jest liczba trzycyfrowa $\overline{abc}$, co oznacza $100a + 10b + c$, przy czym $a \geqslant c > 0$.

- [ ] Liczba $\overline{abc} - \overline{cba}$ jest podzielna przez 9;
- [ ] Liczba $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ jest podzielna przez 37;
- [ ] W liczbie $\overline{abc} \cdot \overline{cba}$ pierwsza i ostatnia cyfra są takie same.

20. Przestrzenny n-kąt foremny to łamana zwyczajna zamknięta, zbudowana z n odcinków równej długości tak, by kąty między sąsiednimi odcinkami były wszystkie równe.

- [ ] Istnieje przestrzenny 6-kąt foremny, który nie leży w jednej płaszczyźnie.
- [ ] Istnieje przestrzenny 6-kąt foremny, którego wszystkie kąty są proste.
- [ ] Każdy przestrzenny 4-kąt foremny, którego wszystkie kąty są proste, leży w pewnej płaszczyźnie.

21. W grupie 50 osób 32 jest płci żeńskiej, 30 ma blond włosy i 45 jest pełnoletnich. Wynika stąd, że

- [ ] jest co najmniej 5 pełnoletnich blondynek;
- [ ] jest co najmniej 10 blondynek;
- [ ] jest co najmniej 10 pełnoletnich blondynów.

22. Figura złożona z prostej i okręgu musi mieć

- [ ] przynajmniej jedną oś symetrii;
- [ ] środek symetrii;
- [ ] dwie osie symetrii.

23*. Funkcja $2^{\cos x}$ jest

- [ ] ograniczona przez 1;
- [ ] okresowa;
- [ ] nieograniczona;

24. Niech $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$. Wówczas

- [ ] od pewnego miejsca $a_n > n$;
- [ ] ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest nieograniczony
- [ ] ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest ograniczony przez 2.

25. Liczba wpólnych prostych stycznych do dwóch okręgów może wynosić

- [ ] 0;
- [ ] 1;
- [ ] 2.

26. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + c$. Wynika stąd, że $x_1x_2^2$ i $x_1^2x_2$ są pierwiastkami trójmianu

- [ ] $x^2 + bcx + c^3$;
- [ ] $x^2 + (b + c)x + c^2$;
- [ ] $x^2 - (b - c)x + c^3$.

27. Rozważamy trójkąty o bokach długości a, b, c, gdzie $0 < a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3$. Wówczas

- [ ] pole każdego z tych trójkątów nie przekracza 1;
- [ ] istnieje wśród nich trójkąt o polu 1;
- [ ] istnieje wśród nich nieskończenie wiele trójkątów równoramiennych.

28. Niech $a = m(m + 1)(m + 2)$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas a

- [ ] jest podzielne przez 24;
- [ ] dla żadnego m nie jest sześcianem liczby naturalnej;
- [ ] jest podzielne przez 6.

29. Niech ciąg a_n spełnia, dla ustalonego $r > 0$ i każdego naturalnego n, warunek $a_{n+2} - a_n = r$. Wtedy

- [ ] ciąg (b_n), gdzie $b_n = a_{2n+1}$, musi być arytmetyczny;
- [ ] ciąg (a_n) jest rosnący;
- [ ] ciąg (a_n) musi być arytmetyczny.

30*. Wielomian $x^{n!} + n!$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą, ma pierwiastek rzeczywisty

- [ ] tylko dla $n = 1$;
- [ ] dla każdego n;
- [ ] dla każdego nieparzystego n.