Test kwalifikacyjny na II Warsztaty Matematyczne

Na pytania odpowiada się "tak" lub "nie" poprzez wpisanie odpowiednio "**T**" bądź "**N**" w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi "tak" i "nie". W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. W wielomianie $(1+x)^{17}$ największy współczynnik liczbowy występuje przy

T x^8;
T x^9;
N x^{10}.

2. Równanie $x^2-(m+n)x+mn=0$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi, ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

T gdy mn nie jest kwadratem liczby całkowitej;
T gdy $m \neq n$;
N zawsze.

3. Na szachownicy 8×8 stoi jedna figura szachowa. Liczba ruchów, które może wykonać, nie zależy od miejsca, na którym stoi, jeżeli jest to

N hetman;
T wieża;
N skoczek.

4. Dany jest ciąg (a_n) taki, że dla pewnego rzeczywistego i różnego od zera k ciąg (ka_n) jest arytmetyczny. Wtedy

T (a_n) jest arytmetyczny;
N ciąg (na_n) jest arytmetyczny;
T dla każdego l ciąg (la_n) jest arytmetyczny.

5. Funkcję f nazywamy parzystą, jeżeli dla każdego x zachodzi $f(x)=f(-x)$. Dla dowolnej funkcji f:

T $f(x^2)$ jest funkcją parzystą;
N $(f(x))^2$ jest funkcją parzystą;
T $f(x)+f(-x)+1$ jest funkcją parzystą.

6. Dla $n, k \in \mathbb{N}$

[T] $\binom{n+1}{k+1} \geqslant \binom{n}{k}$;
[N] $\binom{n+1}{k} \geqslant \binom{n}{k+1}$;
[N] $\binom{n}{k+1} \geqslant \binom{n+1}{k}$.

7. Nierówność $a^3 > a^5$ jest prawdziwa dla

[N] $a < 0$;
[T] $0 < a < 1$;
[T] $a < -1$

8*. Najmniejszą wysokością danego trójkąta jest h. Wówczas:

[T] żaden bok nie jest krótszy niż h;
[N] któryś bok może być równy h;
[T] najkrótsza środkowa jest nie mniejsza niż h.

9. Kwadrat można podzielić na:

[N] 3 trójkąty o równych polach;
[T] 2000 trójkątów przystających;
[T] 2000 pięciokątów o równych polach.

10. Przecinając sześcian płaszczyzną można w przekroju otrzymać:

[T] trapez nie będący równoległobokiem;
[T] romb nie będący kwadratem;
[N] czworokąt nie będący trapezem.

11*. Jeżeli $k|\ l$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l > 1$, to

[T] $2^k - 1|\ 2^l - 1$;
[T] $k^k|\ l^l$;
[N] $k^k - 1|\ l^l - 1$.

12. Wielościan wypukły ma zawsze

[T] dwie ściany o tej samej liczbie boków;
[T] mniej wierzchołków niż krawędzi;
[N] objętość nie większą niż pole największej ściany pomnożone przez największą odległość między dwoma wierzchołkami.

13. Suma skończenie wielu liczb

[N] wymiernych może być niewymierna;
[T] niewymiernych może być wymierna;
[N] których moduł jest większy od 1 musi być większa od 1.

14*. Czy dla każdej liczby naturalnej n po liczbie jej dzielników można stwierdzić, czy jest ona

[T] liczbą pierwszą?
[T] kwadratem pewnej liczby naturalnej?
[N] sześcianem pewnej liczby naturalnej?

15. W Lolandii są w obiegu tylko banknoty o nominale 21 L. oraz monety o nominale 12 L. Można zatem kupić telewizor o cenie:

[T] 12345 L.;
[T] 123456 L.;
[N] 1234567 L.

16. Istnieje taki trójkąt prostokątny, że:

[N] iloczyn długości boków i wysokości jest większy niż $\pi^2 \cdot S^3$, gdzie S to pole tego trójkąta;
[N] suma długości średnic okręgów wpisanego i opisanego jest mniejsza niż suma długości przyprostokątnych;
[N] $a^6 + b^6 > c^6$, gdzie a, b - długości przyprostokątnych, c - długość przeciwprostokątnej.

17*. W każdym trójkącie:

[T] suma długości wysokości jest mniejsza od sumy długości boków;
[T] suma długości środkowych jest mniejsza od sumy długości boków;
[T] ze środkowych można zbudować trójkąt.

18. $2|x| = |x+1| + |x-1|$ dla $x \in \mathbb{R}$ jeśli

[T] $|x| > 1$;
[N] $|x+1| > |x-1|$;
[T] $\frac{|x-1|}{|x+1|+2} \geqslant 1$.

19*. Dana jest liczba trzycyfrowa $\overline{abc}$, co oznacza $100a + 10b + c$, przy czym $a \geqslant c > 0$.

[T] Liczba $\overline{abc} - \overline{cba}$ jest podzielna przez 9;
[T] Liczba $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ jest podzielna przez 37;
[N] W liczbie $\overline{abc} \cdot \overline{cba}$ pierwsza i ostatnia cyfra są takie same.

20. Przestrzenny n-kąt foremny to łamana zwyczajna zamknięta, zbudowana z n odcinków równej długości tak, by kąty między sąsiednimi odcinkami były wszystkie równe.

[T] Istnieje przestrzenny 6-kąt foremny, który nie leży w jednej płaszczyźnie.
[T] Istnieje przestrzenny 6-kąt foremny, którego wszystkie kąty są proste.
[T] Każdy przestrzenny 4-kąt foremny, którego wszystkie kąty są proste, leży w pewnej płaszczyźnie.

21. W grupie 50 osób 32 jest płci żeńskiej, 30 ma blond włosy i 45 jest pełnoletnich. Wynika stąd, że

[T] jest co najmniej 5 pełnoletnich blondynek;
[T] jest co najmniej 10 blondynek;
[N] jest co najmniej 10 pełnoletnich blondynów.

22. Figura złożona z prostej i okręgu musi mieć

[T] przynajmniej jedną oś symetrii;
[N] środek symetrii;
[N] dwie osie symetrii.

23*. Funkcja $2^{\cos x}$ jest

[N] ograniczona przez 1;
[T] okresowa;
[N] nieograniczona;

24. Niech $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ dla $n \geqslant 2$. Wówczas

[T] od pewnego miejsca $a_n > n$;
[N] ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest nieograniczony
[T] ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest ograniczony przez 2.

25. Liczba wpólnych prostych stycznych do dwóch okręgów może wynosić

[T] 0;
[T] 1;
[T] 2.

26. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + c$. Wynika stąd, że $x_1x_2^2$ i $x_1^2x_2$ są pierwiastkami trójmianu

[T] $x^2 + bcx + c^3$;
[N] $x^2 + (b + c)x + c^2$;
[N] $x^2 - (b - c)x + c^3$.

27. Rozważamy trójkąty o bokach długości a, b, c, gdzie $0 < a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3$. Wówczas

[T] pole każdego z tych trójkątów nie przekracza 1;
[T] istnieje wśród nich trójkąt o polu 1;
[T] istnieje wśród nich nieskończenie wiele trójkątów równoramiennych.

28. Niech $a = m(m + 1)(m + 2)$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas a

[N] jest podzielne przez 24;
[T] dla żadnego m nie jest sześcianem liczby naturalnej;
[T] jest podzielne przez 6.

29. Niech ciąg a_n spełnia, dla ustalonego $r > 0$ i każdego naturalnego n, warunek $a_{n+2} - a_n = r$. Wtedy

[T] ciąg (b_n), gdzie $b_n = a_{2n+1}$, musi być arytmetyczny;
[N] ciąg (a_n) jest rosnący;
[N] ciąg (a_n) musi być arytmetyczny.

30*. Wielomian $x^{n!} + n!$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą, ma pierwiastek rzeczywisty

[T] tylko dla $n = 1$;
[N] dla każdego n;
[N] dla każdego nieparzystego n.