

Test kwalifikacyjny na II Warsztaty Matematyczne

Na pytania odpowiada się "tak" lub "nie" poprzez wpisanie odpowiednio "T" bądź "N" w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi "tak" i "nie". W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:

Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.

Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.

Za brak odpowiedzi: **0** punktów.

Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.

Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.

Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. W wielomianie $(1+x)^{17}$ największy współczynnik liczbowy występuje przy

- x^8 ;
- x^9 ;
- x^{10} .

2. Równanie $x^2 - (m+n)x + mn = 0$, gdzie m i n są dodatnimi liczbami całkowitymi, ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste

- gdy mn nie jest kwadratem liczby całkowitej;
- gdy $m \neq n$;
- zawsze.

3. Na szachownicy 8×8 stoi jedna figura szachowa. Liczba ruchów, które może wykonać, nie zależy od miejsca, na którym stoi, jeżeli jest to

- hetman;
- wieża;
- skoczek.

4. Dany jest ciąg (a_n) taki, że dla pewnego rzeczywistego i różnego od zera k ciąg (ka_n) jest arytmetyczny. Wtedy

- (a_n) jest arytmetyczny;
- ciąg (na_n) jest arytmetyczny;
- dla każdego l ciąg (la_n) jest arytmetyczny.

5. Funkcję f nazywamy parzystą, jeżeli dla każdego x zachodzi $f(x) = f(-x)$. Dla dowolnej funkcji f :

- $f(x^2)$ jest funkcją parzystą;
- $(f(x))^2$ jest funkcją parzystą;
- $f(x) + f(-x) + 1$ jest funkcją parzystą.

6. Dla $n, k \in \mathbb{N}$

$\binom{n+1}{k+1} \geq \binom{n}{k}$;

$\binom{n+1}{k} \geq \binom{n}{k+1}$;

$\binom{n}{k+1} \geq \binom{n+1}{k}$.

7. Nierówność $a^3 > a^5$ jest prawdziwa dla

$a < 0$;

$0 < a < 1$;

$a < -1$

8*. Najmniejszą wysokością danego trójkąta jest h . Wówczas:

żaden bok nie jest krótszy niż h ;

któryś bok może być równy h ;

najkrótsza środkowa jest nie mniejsza niż h .

9. Kwadrat można podzielić na:

3 trójkąty o równych polach;

2000 trójkątów przystających;

2000 pięciokątów o równych polach.

10. Przecinając sześcián płaszczyzną można w przekroju otrzymać:

trapez nie będący równoległobokiem;

romb nie będący kwadratem;

czworokąt nie będący trapezem.

11*. Jeżeli $k \mid l$, $k, l \in \mathbb{N}$, $k, l > 1$, to

$2^k - 1 \mid 2^l - 1$;

$k^k \mid l^l$;

$k^k - 1 \mid l^l - 1$.

12. Wielościan wypukły ma zawsze

T dwie ściany o tej samej liczbie boków;

T mniej wierzchołków niż krawędzi;

N objętość nie większą niż pole największej ściany pomnożone przez największą odległość między dwoma wierzchołkami.

13. Suma skończenie wielu liczb

N wymiernych może być niewymierna;

T niewymiernych może być wymierna;

N których moduł jest większy od 1 musi być większa od 1.

14*. Czy dla każdej liczby naturalnej n po liczbie jej dzielników można stwierdzić, czy jest ona

T liczbą pierwszą?

T kwadratem pewnej liczby naturalnej?

N sześcianiem pewnej liczby naturalnej?

15. W Lolandii są w obiegu tylko banknoty o nominale 21 L. oraz monety o nominale 12 L. Można zatem kupić telewizor o cenie:

T 12345 L.;

T 123456 L.;

N 1234567 L.

16. Istnieje taki trójkąt prostokątny, że:

N iloczyn długości boków i wysokości jest większy niż $\pi^2 \cdot S^3$, gdzie S to pole tego trójkąta;

N suma długości średnic okręgów wpisanego i opisanego jest mniejsza niż suma długości przyprostokątnych;

N $a^6 + b^6 > c^6$, gdzie a, b - długości przyprostokątnych, c - długość przeciwprostokątnej.

17*. W każdym trójkącie:

T suma długości wysokości jest mniejsza od sumy długości boków;

T suma długości środkowych jest mniejsza od sumy długości boków;

T ze środkowych można zbudować trójkąt.

18. $2|x| = |x + 1| + |x - 1|$ dla $x \in \mathbb{R}$ jeśli

T $|x| > 1$;

N $|x + 1| > |x - 1|$;

T $\frac{|x-1|}{|x+1|+2} \geq 1$.

19*. Dana jest liczba trzycyfrowa \overline{abc} , co oznacza $100a + 10b + c$, przy czym $a \geq c > 0$.

T Liczba $\overline{abc} - \overline{cba}$ jest podzielna przez 9;

T Liczba $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ jest podzielna przez 37;

N W liczbie $\overline{abc} \cdot \overline{cba}$ pierwsza i ostatnia cyfra są takie same.

20. Przestrzenny n -kąć foremny to łamana zwyczajna zamknięta, zbudowana z n odcinków równej długości tak, by kąty między sąsiednimi odcinkami były wszystkie równe.

T Istnieje przestrzenny 6-kąć foremny, który nie leży w jednej płaszczyźnie.

T Istnieje przestrzenny 6-kąć foremny, którego wszystkie kąty są proste.

T Każdy przestrzenny 4-kąć foremny, którego wszystkie kąty są proste, leży w pewnej płaszczyźnie.

21. W grupie 50 osób 32 jest płci żeńskiej, 30 ma blond włosy i 45 jest pełnoletnich. Wynika stąd, że

T jest co najmniej 5 pełnoletnich blondynek;

T jest co najmniej 10 blondynek;

N jest co najmniej 10 pełnoletnich blondynów.

22. Figura złożona z prostej i okręgu musi mieć

T przynajmniej jedną oś symetrii;

N środek symetrii;

N dwie osie symetrii.

23*. Funkcja $2^{\cos x}$ jest

N ograniczona przez 1;

T okresowa;

N nieograniczona;

24. Niech $a_1 = a_2 = 1$ oraz $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ dla $n \geq 2$. Wówczas

- T od pewnego miejsca $a_n > n$;
- N ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest nieograniczony
- T ciąg $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ jest ograniczony przez 2.

25. Liczba wspólnych prostych stycznych do dwóch okręgów może wynosić

- T 0;
- T 1;
- T 2.

26. Liczby x_1 i x_2 są pierwiastkami trójmianu $x^2 + bx + c$. Wynika stąd, że $x_1x_2^2$ i $x_1^2x_2$ są pierwiastkami trójmianu

- T $x^2 + bcx + c^3$;
- N $x^2 + (b+c)x + c^2$;
- N $x^2 - (b-c)x + c^3$.

27. Rozważamy trójkąty o bokach długości a, b, c , gdzie $0 < a \leq 1 \leq b \leq 2 \leq c \leq 3$. Wówczas

- T pole każdego z tych trójkątów nie przekracza 1;
- T istnieje wśród nich trójkąt o polu 1;
- T istnieje wśród nich nieskończenie wiele trójkątów równoramiennych.

28. Niech $a = m(m+1)(m+2)$, gdzie m jest dodatnią liczbą całkowitą. Wówczas a

- N jest podzielne przez 24;
- T dla żadnego m nie jest sześcianem liczby naturalnej;
- T jest podzielne przez 6.

29. Niech ciąg a_n spełnia, dla ustalonego $r > 0$ i każdego naturalnego n , warunek $a_{n+2} - a_n = r$. Wtedy

- T ciąg (b_n) , gdzie $b_n = a_{2n+1}$, musi być arytmetyczny;
- N ciąg (a_n) jest rosnący;
- N ciąg (a_n) musi być arytmetyczny.

30*. Wielomian $x^{n!} + n!$, gdzie n jest dodatnią liczbą całkowitą, ma pierwiastek rzeczywisty

- T tylko dla $n = 1$;
- N dla każdego n ;
- N dla każdego nieparzystego n .