KÓŁECZKO Z II ETAPÓW (22.02.07)

1. Szachownica ma kształt kwadratu o boku długości n, podzielonego na n^2 kwadratów jednostkowych. Dla jakich n można przykryć szachownicę kwadratowymi klockami o boku długości 2 lub 3?

2. Dwusieczna kąta BAC w trójkącie ABC przecina okrąg opisany na tym trójkącie w punkcie D. Punkty K i L są rzutami odpowiednio punktów B i C na prostą AD. Dowieść, że $BK + CL \geqslant AD$.

3. Punkty A, B, C leżą w tej własnie kolejności na prostej, przy czym AB jest krótsze niż BC. Punkty D, E są wierzchołkami kwadratu $ABDE$. Okrąg o średnicy AC przecina prostą DE w punktach P i Q, przy czym punkt P należy do odcinka DE. Proste AQ i BD przecinają się w punkcie R. Udowodnić, że $DP = DR$.

4. W n-osobowej grupie osób działa sześć grup. W skład każej z nich wchodzi nie mniej nież $n/4$ osób. Dowieść, że istnieją dwie grupy, których część wspólna liczy nie mniej niż $n/30$ osób.

5. Wyznaczyć wszystkie trójki liczb pierwszych p, q, r, takie re $p \geqslant q \geqslant r$ oraz każda z liczb: $pq + r$, $pq + r^2$, $qr + p$, $qr + p^2$, $pr + q$, $pr + q^2$ jest liczbą pierwszą.

6. Rozstrzygnąć, czy każdą liczbę wymierną dodatnią można przedstawić w postaci $\frac{a^2+b^3}{c^5+d^7}$, gdzie a, b, c, d są liczbami całkowitymi dodatnimi.

7. Niech $n \geqslant 3$. Dowieść, że dowolny wielomian postaci $x^n + a_{n-3}x^{n-3} + a_{n-4}x^{n-4} + ... + a_1x + a_0$, gdzie co najmniej jeden ze współczynników rzeczywistych a_0,a_1,...,a_{n-3} jest różny od zera, ma mniej niż n pierwiastków rzeczywistych (każdy pierwiastek liczymy tyle razy, ile wynosi jego krotność).