Zadania do samodzielnego rozwiązywania

poniedziałek, 25 września 2000

21. Dany jest test o następujących zasadach: pytania są pogrupowane w zestawy po trzy. Na każde pytanie można udzielić odpowiedzi Tak lub Nie, bądź też nie udzielić odpowiedzi. Za udzielenie poprawnej odpowiedzi dostaje się 1 punkt, za udzielenie niepoprawnej -1 punkt, zaś za brak odpowiedzi 0 punktów. Dodatkowo za prawidłowe udzielenie odpowiedzi na wszystkie trzy pytania w zestawie dostaje się 2 punkty.

a) Czy w tym teście opłaca się strzelać?

b) Jaka jest wartość oczekiwana wyniku testu, jeżeli odpowiedzi udziela się losowo, zaś pytań jest 30?

22. Oblicz sumę

$$\frac{1}{3^{-2000}+1}+\frac{1}{3^{-1999}+1}+\ldots+\frac{1}{3^{-1}+1}+\frac{1}{3^{0}+1}+\frac{1}{3^{1}+1}+\ldots+\frac{1}{3^{1999}+1}+\frac{1}{3^{2000}+1}.$$

23. Różne punkty A i B należą do okręgu O. Znaleźć zbiór środków ciężkości trójkątów ABP dla wszystkich punktów P należących do O.

24. Na płaszczyźnie dany jest zbiór E oraz takie koła otwarte (tzn. bez brzegu) $K_1, K_2, \ldots, K_n$, że

$$E \subseteq K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_n.$$

Udowodnić, że spośród tych kół można wybrać takie parami rozłączne koła $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_l}$, że

$$E \subseteq 3K_{i_1} \cup 3K_{i_2} \cup \ldots \cup 3K_{i_l}.$$

Uwaga: Jeśli K jest kołem o środku X i promieniu r, to $3K$ jest kołem o środku X i promieniu $3r$.

25. Koledzy Fredka mieszkają na okręgu o promieniu 541 km. Fredek chce ich wszystkich odwiedzić i u każdego z nich zatankować (Fredek ma nieograniczone możliwości tankowania). Kiedy zatankowane paliwo zużyje się całkowicie, Fredek nie będzie miał możliwości kontynuowania podróży.

Wszyscy koledzy Fredka mają w sumie tyle paliwa, aby wystarczyło Fredkowi na odbycie podróży po całym okręgu.

Dowieść, że Fredek może rozpocząć podróż od takiego kolegi, że jadąc przeciwzegarowo po okręgu i tankując po drodze odwiedzi wszystkich kolegów i wróci do punktu wyjścia.

26. Rozważmy mecz ping-ponga pomiędzy dwiema drużynami po 1000 osób rozgrywany metodą "każdy z każdym". Udowodnić, że istnieje 10 graczy z tej samej drużyny takich, że każdy gracz drużyny przeciwnej przegrał z przynajmniej jednym z tych dziesięciu graczy (uwaga: w ping-pongu nie ma remisów).