Pierwsze zawody indywidualne

grupa starsza

wtorek, 26 września 2000

41. Dowieść, że dla dowolnej liczby naturalnej n iloczyn wszystkich takich liczb pierwszych p, które spełniają nierówność $n < p \leqslant 2n$, jest mniejszy od 4^n.

42. Obliczyć $\sum_{k=0}^{n} \binom{3n}{3k}$.

43. W wielokącie wypukłym leży skończona liczba okręgów parami rozłącznych zewnętrznie. Wykazać, że można ten wielokąt rozciąć na takie wielokąty wypukłe, że w każdym z nich będzie zawarty dokładnie jeden z tych okręgów.

44. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ w których równanie $x + y = 2n + 1$ nie ma rozwiązań.

45. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) \in \mathbb{Q} \iff f(x+1) \notin \mathbb{Q}$?

46. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano takie punkty odpowiednio E i F, że $|BE| = |BF|$. Punkt N jest rzutem punktu B na prostą CE. Obliczyć miarę kąta $\angle DNF$.

Pierwsze zawody indywidualne

grupa młodsza

wtorek, 26 września 2000

43. W wielokącie wypukłym leży skończona liczba okręgów parami rozłącznych zewnętrznie. Wykazać, że można ten wielokąt rozciąć na takie wielokąty wypukłe, że w każdym z nich będzie zawarty dokładnie jeden z tych okręgów.

44. Wyznaczyć liczbę podzbiorów zbioru $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ w których równanie $x + y = 2n + 1$ nie ma rozwiązań.

45. Czy istnieje funkcja ciągła $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taka, że $f(x) \in \mathbb{Q} \iff f(x+1) \notin \mathbb{Q}$?

46. Na bokach AB i BC kwadratu $ABCD$ obrano takie punkty odpowiednio E i F, że $|BE| = |BF|$. Punkt N jest rzutem punktu B na prostą CE. Obliczyć miarę kąta $\angle DNF$.

47. Dowieść, że liczba

$$\log_{1+2\sqrt{2}}(1 + 3\sqrt{2})$$

jest niewymierna.
Uwaga: $a = \log_b c$ oznacza, że $b^a = c$.

48. Udowodnić, że jeżeli na bokach dowolnego równoległoboku zbudujemy na zewnątrz kwadraty, to ich środki będą wierzchołkami pewnego kwadratu.

49. Niech $P(x)$ będzie wielomianem stopnia 70 o współczynnikach całkowitych. Wiedząc, że $P(2)$ jest podzielne przez 5, a $P(5)$ jest podzielne przez 2, udowodnić, iż $P(7)$ jest podzielne przez 10.