Zawody drużynowe

czwartek, 28 września 2000

51. Okrąg O jest opisany na trójkącie ABC. Punkt M leży na okręgu O, punkt R leży na zewnątrz O. Proste RA, RB, RC przecinają O odpowiednio w drugich punktach A_1, B_1, C_1. Proste MA_1, MB_1, MC_1 przecinają odpowiednio proste $BC, ACiAB$ w punktach A_2, B_2, C_2. Udowodnić, że punkty A_2, B_2, C_2 oraz R są współliniowe.

52. Punkt P znajduje się wewnątrz kwadratu $ABCD$, przy czym $|PA| = a$, $|PB| = 2a$, $|PC| = 3a$. Obliczyć $|\angle APB|$.

53. W czworokącie $ABCD$ boki AB i CD są równoległe. Przekątne AC i BD przecinają się w punkcie E. Punkt F jest ortocentrum trójkąta EBC, punkt G jest ortocentrum trójkąta EAD. Udowodnić, że środek odcinka GF leży na prostej przechodzącej przez E i prostopadłej do AB.

54. Zbiór $\{1, 2, \ldots, 65\}$ podzielono na cztery rozłączne zbiory. Udowodnić, że istnieją liczby a, b, c (niekoniecznie różne) należące do jednego zbioru takie, że $a + b = c$.

55. Okręgi C_1 i C_2 o środkach odpowiednio w O_1 i O_2 przecinają się w punktach A i B. Prosta l przechodząca przez A przecina odpowiednio okręgi C_1 i C_2 w punktach D i E. Proste DO_1 i EO_2 przecinają się w punkcie P, a prosta m, przechodząca przez P i prostopadła do DE przecina prostą AB w punkcie Q. Udowodnić, że punkty B, D, E, P i Q leżą na jednym okręgu.

56. Dana jest skończona liczba kwadratów o sumie pól równej 4. Udowodnić, że można nimi pokryć kwadrat o boku 1.

57. Wyznaczyć wszystkie trójki (x, y, z) liczb wymiernych dodatnich, dla których liczby $x + y + z$, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$, xyz są naturalne.

58. Wyznaczyć wszystkie ciągi $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n$ liczb rzeczywistych nieujemnych o minimalnej długości takie, że

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 25, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^2 = 33, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^3 = 49, \qquad \sum_{i=1}^{n} a_i^4 = 81.$$

59. W trójkącie ABC $|AB| = |AC|$ oraz $|\angle BAC| = 20^\circ$. Punkt D leży na boku AC i $|\angle CBD| = 50^\circ$, punkt E leży na boku AB i $|\angle BCE| = 60^\circ$. Obliczyć $|\angle CED|$.

510. Dane są dwa ciągi liczb całkowitych dodatnich: ciąg arytmetyczny o różnicy $r > 0$ i ciąg geometryczny o ilorazie $q > 1$, liczby q, r są względnie pierwsze. Udowodnić, że jeśli te ciągi mają jeden wspólny wyraz, to mają nieskończenie wiele wspólnych wyrazów.

511. W Lolandii znajduje się 65 pomników króla Lolisława II. Pomiędzy każdymi dwoma pomnikami istnieje połączenie, obsługiwane przez jednego z czterech przewoźników: Orbis, Taxi, Metro i Kanalizacja Miejska. Udowodnić, że istnieją trzy pomniki takie, że połączenie pomiędzy dowolnymi dwoma z nich obsługuje ten sam przewoźnik.

512. Niech x_1, x_2, y_1, y_2 będą takimi liczbami rzeczywistymi, że

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1.$$

Udowodnić nierówność

$$(x_1y_1 + x_2y_2 - 1)^2 \geqslant (x_1^2 + x_2^2 - 1)(y_1^2 + y_2^2 - 1).$$

513. Niech $P_3(n) = \{A \subset \{1, \ldots, n\} : |A| = 3\}$. Obliczyć $\sum_{A \in P_3(n)} \min(A)$.

514. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej n zachodzi

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i \binom{n}{i}^2 = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n+i}{i}.$$

515. Udowodnić, że dla a, b, c, d rzeczywistych dodatnich zachodzi

$$a + b + c + d \leqslant \frac{abc}{d^2} + \frac{bcd}{a^2} + \frac{cda}{b^2} + \frac{abd}{c^2}.$$

516. Znajdź wszystkie liczby naturalne dla których zachodzi

$$\frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3}{2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3} = \frac{199}{242}.$$

517. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 2$ istnieje wielomian n-tego stopnia, którego nie wszystkie współczynniki są całkowite, ale który przyjmuje całkowite wartości dla argumentów całkowitych.

518. Udowodnić, że dla liczb naturalnych n, k zachodzi

$$2^k \binom{n}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}\binom{n-i}{k-i}.$$