Chyba ostatnia na tym obozie porcja samodzielnych zadań człowieka

grupa młodsza

niedziela, 1 października 2000

81. Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej n zachodzi tożsamość:

$$\sum_{i=0}^{n} i\binom{n}{i}^2 = n\binom{2n-1}{n-1}.$$

82. Czy istnieje czworościan, którego każda krawędź byłaby ramieniem kąta rozwartego jednej ze ścian?

83. Punkty P, Q, R leżą odpowiednio na odcinkach AB, AC, AD w równoległoboku $ABCD$. Udowodnić, że jeśli na czworokącie $APQR$ można opisać okrąg, to $|AR||AD| + |AP||AB| = |AQ||AC|$.

84. Dowieść, że liczba

$$\prod_{n=8}^{64}\left[\binom{3n+31}{n}\binom{4n-19}{n+5} - \binom{3n+31}{n+5}\binom{3n+1}{n}\right]$$

jest sześcianem liczby całkowitej.

85. Dana jest figura S o polu mniejszym od 1. Udowodnić, że można na płaszczyźnie z układem współrzędnych położyć ją tak, by nie zawierała żadnego punktu kratowego.

86. Dane są punkty A i B położone daleko od siebie. Mając do dyspozycji tylko krótką linijkę, narysować prostą AB.

87. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne n, aby liczba $1! + 2! + \cdots + n!$ była kwadratem pewnej liczby naturalnej.

88. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $|\angle ABP| = |\angle ADP|$. Wykazać, że $|\angle PAB| = |\angle PCB|$.

89. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że środki okręgów wpisanych w trójkąty AML, BKM, CLK leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

810. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geqslant 3\sqrt{2}.$$

811. Liczby x, y, z spełniają warunki:

1. $x + y + z = a$,
2. $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{a}$.

Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa a.

813. W zajęciach uczestniczyło 2000 uczniów. Rozwiązali oni łącznie 2000 zadań, przy czym każdy z uczniów rozwiązał dokładnie dwa zadania i każde zadanie zostało rozwiązane przez dwóch uczniów. Wykaż, że zajęcia można było tak poprowadzić, by każdy uczeń przedstawiał jedno z rozwiązanych przez siebie zadań przy tablicy i by każde zadanie zostało w ten sposób omówione.

Chyba ostatnia na tym obozie porcja samodzielnych zadań człowieka

grupa starsza

niedziela, 1 października 2000

86. Dane są punkty A i B położone daleko od siebie. Mając do dyspozycji tylko krótką linijkę, narysować prostą AB.

87. Znaleźć wszystkie takie liczby naturalne n, aby liczba $1!+2!+\cdots+n!$ była kwadratem pewnej liczby naturalnej.

88. Punkt P leży wewnątrz równoległoboku $ABCD$, przy czym $|\angle ABP| = |\angle ADP|$. Wykazać, że $|\angle PAB| = |\angle PCB|$.

89. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB odpowiednio w punktach K, L, M. Dowieść, że środki okręgów wpisanych w trójkąty AML, BKM, CLK leżą na okręgu wpisanym w trójkąt ABC.

810. Udowodnij, że jeżeli liczby a, b, c są dodatnie, to

$$\sqrt{\frac{a+b}{c}} + \sqrt{\frac{b+c}{a}} + \sqrt{\frac{c+a}{b}} \geqslant 3\sqrt{2}.$$

811. Liczby x, y, z spełniają warunki:

1. $x+y+z=a$,
2. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{a}$.

Udowodnij, że co najmniej jedna z liczb x, y, z jest równa a.

720. Niech $W(x)$ będzie wielomianem stopnia dodatniego rozkładalnym na czynniki liniowe i kwadratowe. Udowodnić, że na to, aby dla każdego rzeczywistego x zachodziła nierówność $W(x) \geqslant 0$, potrzeba i wystarcza, aby istniały takie wielomiany P, Q, że $W(x) = [P(x)]^2 + [Q(x)]^2$.

714. Okrąg O jest opisany na trójkącie ABC. Punkt P należy do tego łuku BC okręgu O, do którego nie należy A. Punkty S_1 oraz S_2 są środkami okręgów wpisanych odpowiednio w $\triangle PAB$ i $\triangle PAC$. Dowieść, że przy ustalonych punktach A, B, C i zmieniającym się punkcie P okręgi opisane na trójkątach PS_1S_2 mają punkt wspólny.

812. Udowodnij, że zachodzi następująca nierówność:

$$\ln(\operatorname{tg} 1^\circ)\ln(\operatorname{tg} 2^\circ)\cdots\ln(\operatorname{tg} 89^\circ) < \frac{1}{\pi}.$$

813. W zajęciach uczestniczyło 2000 uczniów. Rozwiązali oni łącznie 2000 zadań, przy czym każdy z uczniów rozwiązał dokładnie dwa zadania i każde zadanie zostało rozwiązane przez dwóch uczniów. Wykaż, że zajęcia można było tak poprowadzić, by każdy uczeń przedstawiał jedno z rozwiązanych przez siebie zadań przy tablicy i by każde zadanie zostało w ten sposób omówione.