

Test kwalifikacyjny na I Warsztaty Matematyczne

Na pytania odpowiada się "tak" lub "nie" poprzez wpisanie odpowiednio "T" bądź "N" w pole obok pytania. W danym trzy pytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi "tak" i "nie". W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:

Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.

Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.

Za brak odpowiedzi: **0** punktów.

Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzy pytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.

Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.

Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Na to, by okręgi były styczne, wystarcza, by odległość ich środków była równa

- Sumie ich promieni
- Różnicy ich promieni
- Iloczynowi ich promieni

2. Suma dwu liczb pierwszych

- Musi być liczbą pierwszą
- Dzieli się przez 3
- Może być liczbą pierwszą

3. Równanie $x^2 - \pi x + 2 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

- Ma dokładnie jeden pierwiastek
- Nie ma pierwiastków
- Ma dokładnie dwa pierwiastki

4. Równość $|a_1 + \dots + a_n| = |a_1| + \dots + |a_n|$, gdzie a_n są liczbami rzeczywistymi, jest prawdziwa

- Dla dowolnych liczb a_1, \dots, a_n
- Wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby a_1, \dots, a_n są nieujemne
- Jeśli wszystkie spośród liczb a_1, \dots, a_n są ujemne

5*. Prawdopodobieństwo znalezienia wśród 400 kandydatów do szkoły dwudziestu urodzonych tego samego dnia tygodnia jest

- Równe 0
- Równe 1
- Równe $\frac{1}{7}$

6. Dane są ciągi arytmetyczne $1, 5, 9, \dots$ oraz $7, 12, 17, \dots$. Wówczas

- Żadna liczba naturalna nie występuje jednocześnie w obu ciągach
- Istnieje liczba większa od 2000, która występuje w obu ciągach
- Liczba 1997 występuje w obu ciągach

7*. Odcinek AD , gdzie D leży na odcinku BC , dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty podobne do niego. Wynika stąd, że trójkąt ABC jest

- Równoramienny
- Prostokątny
- Równoboczny

8. W liczącej 20 osób grupie 18 zna język angielski, 14 - niemiecki i 12 - francuski. Można zatem mieć pewność, że

- Istnieje osoba mówiąca co najwyżej dwoma językami obcymi
- Trzema językami obcymi włada przynajmniej 6 osób
- Trzema językami obcymi władają przynajmniej 4 osoby

9*. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) geometryczny. Jeśli $a_7 = b_{19}$, $a_8 = b_{18}$, $a_9 = b_{17}$, to dla dowolnego i

- $a_i > a_{i+3}$
- $a_i = b_i$
- $b_{i+3} \geq b_i$

10. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, x

- Warunek $a > 0$ i $b > 0$ jest równoważny warunkowi $a + b > 0$ i $ab > 0$
- Warunek $|x - 1| < 0$ jest równoważny warunkowi $(x - 1)(1 - x) < 0$
- Warunek $|x - 1| < 2$ jest równoważny warunkowi $-1 < x < 3$

11. Liczby całkowite dodatnie x, y, z spełniają warunek $x^2 + y^2 = z^2$. Wówczas co najmniej jedna z nich

- Dzieli się przez 2
- Jest nieparzysta
- Dzieli się przez 3

12. Liczba 314159199999999

- Dzieli się przez 3
- Daje z dzielenia przez 9 resztę 6
- Dzieli się przez 9

13*. Długości a, b, c boków trójkąta prostokątnego spełniają $a < b < c$. Wynika stąd, że

- $a^4 + b^4 < c^4$
- $a^4 + b^4 = c^4$
- $a^4 + b^4 > c^4$

14. Stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt jest zawsze

- Mniejszy od 100
- Równy stosunkowi pola tego trójkąta do jego obwodu
- Liczbą niewymierną

15. Funkcja $f(x) = \sin(\cos x)$ dla wszystkich rzeczywistych x

- Ma największą wartość równą 1
- Jest okresowa
- Przyjmuje wartość 0 nieskończenie wiele razy

16. Rozpatrzmy następujący warunek: istnieje taki ciąg geometryczny (a_k) , że liczby a_1, \dots, a_n są całkowite, a wszystkie dalsze wyrazy ciągu: a_{n+1}, a_{n+2}, \dots nie są całkowite. Prawdą jest, że

- Każda dodatnia całkowita liczba n spełnia ten warunek
- Tylko liczba $n = 1$ spełnia ten warunek
- Nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich nie spełnia tego warunku

17. Dla danego ciągu (a_n) definiujemy $b_n = a_{n+1} - a_n$. Załóżmy, że tak zdefiniowany ciąg b_n jest monotoniczny. Wynika stąd, że ciąg a_n jest

- Ograniczony
- Monotoniczny
- Monotoniczny począwszy od pewnego wyrazu

18*. Liczba 10004000600040001 jest

- Czwartą potęgą liczby całkowitej
- Sześcianem liczby całkowitej
- Podzielna przez 321

19*. Dowolny trójkąt ostrokątny można podzielić na

- Trzy trójkąty prostokątne
- Dwa trójkąty rozwartokątne
- Trzy trójkąty równoramienne

20. Figura powstała przez połączenie środków kolejnych boków trapezu równoramiennego

- Jest prostokątem
- Jest rombem
- Ma pole równe połowie pola trapezu

21. Suma liczb całkowitych a i b jest równa ich iloczynowi. Wynika stąd, że

- $a = b$
- $a = 0$ lub $b = 2$
- $a = 0$ lub $b = 0$

22*. Tabliczkę czekolady złożoną z 24 kostek łamiemy w ten sposób, że za każdym razem przełamujemy tylko jedną część i na dokładnie dwie części. Aby mieć każdą kostkę oddzielnie należy wykonać

- Co najmniej 23 łamania
- Co najwyżej 23 łamania
- Dokładnie 23 łamania

23. Wysokość trójkąta może padać na bok przeciwległy wierzchołkowi, z którego jest poprowadzona, na wierzchołek lub na przedłużenie tego boku. Istnieje trójkąt, w którym liczba wysokości padających na przedłużenie boku jest równa

- 1
- 2
- 3

24. n prostych dzieli płaszczyznę na

- Co najmniej $2n$ części
- Co najwyżej $\binom{n+1}{2} + 1$ części
- Dokładnie $\binom{n+1}{2} + 1$ części

25. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie, a dwie spośród ich wspólnych stycznych są prostopadłe. Stosunek promieni tych okręgów może być równy

- 1
- 2
- $3 + 2\sqrt{2}$

26. Suma $\sum_{i=1}^n i^5$ jest równa

- $\frac{1}{6}(n+1)^6 - \frac{1}{2}(n+1)^5 + \frac{5}{12}(n+1)^4 - \frac{1}{12}(n+1)^2$
- $\sum_{i=n}^{2n} (i-n)^5$
- $4n^5 - \frac{115}{4}n^4 + \frac{245}{2}n^3 - \frac{1083}{4}n^2 + 294n - 120$

27. Przecinając sześciian płaszczyzną można otrzymać

- Czworokąt nie będący trapezem (tj. taki, którego żadne dwa boki nie są równoległe)
- Pięciokąt foremny
- Sześciokąt foremny

28. Równania $ax^2 + bx + c$ oraz $dx^2 + ex + f$ mają te same dwa pierwiastki. Z tego wynika, że

- $a = d$
- $ae = bd$
- $c + f = 0$

29. Pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c$ są liczby 3 i 6. Z tego wynika, że

- b jest całkowite
- Jeżeli a jest całkowite to b jest całkowite
- Jeżeli b jest całkowite to c jest całkowite

30. Na ostrosłupie można opisać sferę wtedy i tylko wtedy, gdy:

- Na jego podstawie można opisać okrąg
- Środki jego krawędzi bocznych leżą na jednej płaszczyźnie
- Środki jego krawędzi bocznych leżą na jednym okręgu