Test kwalifikacyjny na I Warsztaty Matematyczne

Na pytania odpowiada się "tak" lub "nie" poprzez wpisanie odpowiednio "**T**" bądź "**N**" w pole obok pytania. W danym trzypytaniowym zestawie możliwa jest dowolna kombinacja odpowiedzi "tak" i "nie". W zestawach zaznaczonych gwiazdką (gwiazdka wygląda tak: *) prócz udzielenia odpowiedzi należy je uzasadnić.

Zasady punktacji:
Za pojedynczą poprawną odpowiedź: **1** punkt.
Za pojedynczą niepoprawną odpowiedź: **-1** punkt.
Za brak odpowiedzi: **0** punktów.
Za wszystkie poprawne odpowiedzi w jednym trzypytaniowym zestawie dodatkowe **2** punkty.
Za poprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi: **1** punkt.
Za niepoprawne uzasadnienie pojedynczej odpowiedzi bądź brak takowego: **0** punktów.

Powodzenia!

1. Na to, by okręgi były styczne, wystarcza, by odległość ich środków była równa

[T] Sumie ich promieni
[T] Różnicy ich promieni
[N] Iloczynowi ich promieni

2. Suma dwu liczb pierwszych

[N] Musi być liczbą pierwszą
[N] Dzieli się przez 3
[T] Może być liczbą pierwszą

3. Równanie $x^2 - \pi x + 2 = 0$ w zbiorze liczb rzeczywistych

[N] Ma dokładnie jeden pierwiastek
[N] Nie ma pierwiastków
[T] Ma dokładnie dwa pierwiastki

4. Równość $|a_1 + \ldots + a_n| = |a_1| + \ldots + |a_n|$, gdzie a_n są liczbami rzeczywistymi, jest prawdziwa

[N] Dla dowolnych liczb $a_1, \ldots, a_n$
[N] Wtedy i tylko wtedy, gdy wszystkie liczby $a_1, \ldots, a_n$ są nieujemne
[T] Jeśli wszystkie spośród liczb $a_1, \ldots, a_n$ są ujemne

5*. Prawdopodobieństwo znalezienia wśród 400 kandydatów do szkoły dwudziestu urodzonych tego samego dnia tygodnia jest

[N] Równe 0
[T] Równe 1
[N] Równe $\frac{1}{7}$

6. Dane są ciągi arytmetyczne $1, 5, 9, \ldots$ oraz $7, 12, 17, \ldots$. Wówczas

[N] Żadna liczba naturalna nie występuje jednocześnie w obu ciągach
[T] Istnieje liczba większa od 2000, która występuje w obu ciągach
[T] Liczba 1997 występuje w obu ciągach

7*. Odcinek AD, gdzie D leży na odcinku BC, dzieli trójkąt ABC na dwa trójkąty podobne do niego. Wynika stąd, że trójkąt ABC jest

[N] Równoramienny
[T] Prostokątny
[N] Równoboczny

8. W liczącej 20 osób grupie 18 zna język angielski, 14 - niemiecki i 12 - francuski. Można zatem mieć pewność, że

[T] Istnieje osoba mówiąca co najwyżej dwoma językami obcymi
[N] Trzema językami obcymi włada przynajmniej 6 osób
[T] Trzema językami obcymi władają przynajmniej 4 osoby

9*. Ciąg (a_n) jest arytmetyczny, a ciąg (b_n) geometryczny. Jeśli $a_7 = b_{19},\ a_8 = b_{18},\ a_9 = b_{17}$, to dla dowolnego i

[N] $a_i > a_{i+3}$
[T] $a_i = b_i$
[T] $b_{i+3} \geqslant b_i$

10. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b, x

[T] Warunek $a > 0$ i $b > 0$ jest równoważny warunkowi $a + b > 0$ i $ab > 0$
[N] Warunek $|x - 1| < 0$ jest równoważny warunkowi $(x - 1)(1 - x) < 0$
[T] Warunek $|x - 1| < 2$ jest równoważny warunkowi $-1 < x < 3$

11. Liczby całkowite dodatnie x, y, z spełniają warunek $x^2 + y^2 = z^2$. Wówczas co najmniej jedna z nich

- [T] Dzieli się przez 2
- [N] Jest nieparzysta
- [T] Dzieli się przez 3

12. Liczba 314159199999999

- [T] Dzieli się przez 3
- [T] Daje z dzielenia przez 9 resztę 6
- [N] Dzieli się przez 9

13*. Długości a, b, c boków trójkąta prostokątnego spełniają $a < b < c$. Wynika stąd, że

- [T] $a^4 + b^4 < c^4$
- [N] $a^4 + b^4 = c^4$
- [N] $a^4 + b^4 > c^4$

14. Stosunek pola koła opisanego na trójkącie do pola koła wpisanego w ten trójkąt jest zawsze

- [N] Mniejszy od 100
- [N] Równy stosunkowi pola tego trójkąta do jego obwodu
- [N] Liczbą niewymierną

15. Funkcja $f(x) = \sin(\cos x)$ dla wszystkich rzeczywistych x

- [N] Ma największą wartość równą 1
- [T] Jest okresowa
- [T] Przyjmuje wartość 0 nieskończenie wiele razy

16. Rozpatrzmy następujący warunek: istnieje taki ciąg geometryczny (a_k), że liczby $a_1, \ldots, a_n$ są całkowite, a wszystkie dalsze wyrazy ciągu: $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ nie są całkowite. Prawdą jest, że

- [T] Każda dodatnia całkowita liczba n spełnia ten warunek
- [N] Tylko liczba $n = 1$ spełnia ten warunek
- [N] Nieskończenie wiele liczb całkowitych dodatnich nie spełnia tego warunku

17. Dla danego ciągu (a_n) definiujemy $b_n = a_{n+1} - a_n$. Załóżmy, że tak zdefiniowany ciąg b_n jest monotoniczny. Wynika stąd, że ciąg a_n jest

- [N] Ograniczony
- [N] Monotoniczny
- [T] Monotoniczny począwszy od pewnego wyrazu

18*. Liczba 10004000600040001 jest

[T] Czwartą potęgą liczby całkowitej
[N] Sześcianem liczby całkowitej
[N] Podzielna przez 321

19*. Dowolny trójkąt ostrokątny można podzielić na

[T] Trzy trójkąty prostokątne
[N] Dwa trójkąty rozwartokątne
[T] Trzy trójkąty równoramienne

20. Figura powstała przez połączenie środków kolejnych boków trapezu równoramiennego

[N] Jest prostokątem
[T] Jest rombem
[T] Ma pole równe połowie pola trapezu

21. Suma liczb całkowitych a i b jest równa ich iloczynowi. Wynika stąd, że

[T] $a = b$
[T] $a = 0$ lub $b = 2$
[N] $a = 0$ lub $b = 0$

22*. Tabliczkę czekolady złożoną z 24 kostek łamiemy w ten sposób, że za każdym razem przełamujemy tylko jedną część i na dokładnie dwie części. Aby mieć każdą kostkę oddzielnie należy wykonać

[T] Co najmniej 23 łamania
[T] Co najwyżej 23 łamania
[T] Dokładnie 23 łamania

23. Wysokość trójkąta może padać na bok przeciwległy wierzchołkowi, z którego jest poprowadzona, na wierzchołek lub na przedłużenie tego boku. Istnieje trójkąt, w którym liczba wysokości padających na przedłużenie boku jest równa

[N] 1
[T] 2
[N] 3

24. n prostych dzieli płaszczyznę na

[N] Co najmniej $2n$ części
[T] Co najwyżej $\binom{n+1}{2} + 1$ części
[N] Dokładnie $\binom{n+1}{2} + 1$ części

25. Dwa okręgi są styczne zewnętrznie, a dwie spośród ich wspólnych stycznych są prostopadłe. Stosunek promieni tych okręgów może być równy

[T] 1
[N] 2
[T] $3 + 2\sqrt{2}$

26. Suma $\sum_{i=1}^{n} i^5$ jest równa

[T] $\frac{1}{6}(n+1)^6 - \frac{1}{2}(n+1)^5 + \frac{5}{12}(n+1)^4 - \frac{1}{12}(n+1)^2$
[T] $\sum_{i=n}^{2n}(i-n)^5$
[N] $4n^5 - \frac{115}{4}n^4 + \frac{245}{2}n^3 - \frac{1083}{4}n^2 + 294n - 120$

27. Przecinając sześcian płaszczyzną można otrzymać

[N] Czworokąt nie będący trapezem (tj. taki, którego żadne dwa boki nie są równoległe)
[N] Pięciokąt foremny
[T] Sześciokąt foremny

28. Równania $ax^2 + bx + c$ oraz $dx^2 + ex + f$ mają te same dwa pierwiastki. Z tego wynika, że

[N] $a = d$
[T] $ae = bd$
[N] $c + f = 0$

29. Pierwiastkami wielomianu $ax^2 + bx + c$ sa liczby 3 i 6. Z tego wynika, że

[N] b jest całkowite
[T] Jeżeli a jest całkowite to b jest całkowite
[T] Jeżeli b jest całkowite to c jest całkowite

30. Na ostrosłupie można opisać sferę wtedy i tylko wtedy, gdy:

[T] Na jego podstawie można opisać okrąg
[N] Środki jego krawędzi bocznych leżą na jednej płaszczyźnie
[T] Środki jego krawędzi bocznych leżą na jednym okręgu