Zadania trudniejsze na kółko 12.11.2009

15.10.2009

1. W trójkącie ostrokątnym ABC opisanym na okręgu ω dwusieczne poprowadzone z wierzchołków A i B przecinają przeciwległe boki trójkąta w punktach odpowiednio A_1 i B_1. Spodki wysokości opuszczonych z wierzchołków A i B to odpowiednio punkty A_2 i B_2. Okrąg ω jest styczny do boków BC i CA w punktach odpowiednio A_3 i B_3. Pokazać, że proste A_1B_1, A_2B_2 oraz A_3B_3 przecinają się w jednym punkcie.

2. Udowodnić, że dla dowolnej liczby naturalnej $n \geqslant 3$ prawdziwa jest nierówność:

$$\sqrt[n]{n} > \sqrt[n+1]{n+1}.$$

3. Znaleźć wszystkie funkcje $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takie, że dla każdego $x,\ y \in \mathbb{R}$ zachodzi

$$f((f(x))^2 + f(y)) = xf(x) + y.$$

4. Pokazać, że dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich a, b, c zachodzi nierówność:

$$\frac{(b+c \quad a)^2}{(b+c)^2+a^2} + \frac{(c+a \quad b)^2}{(c+a)^2+b^2} + \frac{(a+b \quad c)^2}{(a+b)^2+c^2} \geqslant \frac{3}{5}.$$

Ponieważ do większości uczestników kółka nie dotarła w porę informacja o zadaniach trudniejszych, seria ta zostanie omówiona na następnym kółku prowadzonym przeze mnie, czyli 12 listopada.

Marta