KÓŁECZKO Z JEDNOKŁADNOŚCI (8.11.06)

1. TEORIA

1.1. Definicja - Jednokładność o środku O i skali α to przekształcenie płaszczyzny na płaszczyznę, które przekształca punkt A na taki punkt A', że $\vec{OA'} = \alpha \cdot \vec{OA}$.

1.2. Jednokładność o skali różnej od 1 ma dokładnie jeden punkt stały - środek jednokładności.

1.3. Jednokładność przekształca dowolną figurę na figurę do niej podobną.

1.4. Środek jednokładności, punkt i jego obraz leżą na jednej prostej.

1.5. Jednokładność zmienia orintację wtedy i tylko wtedy, gdy ma ujemną skalę.

1.6. Złożenie dwóch jednokładności o środkach O_1, O_2jest:

- jeśli $\alpha \cdot \beta = 1$ - przesunięciem
- jeśli $\alpha \cdot \beta$ różne od 1 - jednokładnością o skali $\alpha \cdot \beta$ i środku leżącym na prostej O_1O_2

2. ZADANIA

2.1. Dany jest okrąg o i dwa różne punkty A i B należace do tego okręgu. Znale"xć zbiór środków cieżkości wszystkich takich trójkątów ABP, że punkt P należy do tego okręgu.

2.2. W trójkącie ABC punkt D jest środkiem ciężkości, punkt H jest ortocentrum, a punkt O jest środkiem okręgu opisanego na tym trójkącie. Wykazać, że punkty D, H, O są współliniowe i $DH = 2 \cdot DO$

2.3. Okręgi o_1 i o_2 są wpisane w kąt o wierzchołku P oraz w kąty wierzchołkowe o wierzchołku Q. Punkt R należy do okręgu o_1, a proste PR i QR przecinają okrąg o_2 w czterech punktach. Wykazać, że dwa spośród tych punktów są końcami jednej średnicy okręgu o_2.

2.4. Punkt P należy do wnętrza czworokąta wypukłego $ABCD$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów: ABP, BCP, CDP, DAP są wierzchołkami równoległoboku.

2.5. Przystające, rozłączne okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach odpowiednio A i B. Punkt P należy do okręgu o, odcinki PA i PB przecinają okręgi o_1 i o_2 odpowiednio w punktach C i D. Wykazać, że $AB \parallel CD$.

2.6. Dany jest sześciokąt $ABCDEF$. Wykazać, że środki cieźkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB są wierzchołkami sześciokąta, którego przeciwległe boki są równe i równoległe.

2.7. Dany jest trójkąt ABC. W kąty przy wierzchołkach A i B wpisać dwa przystające okręgi styczne zewnętrznie.