KółKO MATEMATYCZNE DLA KLAS PIERWSZYCH, 18.03.2010

Przydatne instrumenty związane z okręgami, part II

`Teoria:`

1. *Symedianą* poprowadzoną z wierzchołka A w trójkącie ABC nazywamy odbicie półprostej o początku w A, która zawiera środkową AM tego trójkąta, względem dwusiecznej kąta $\angle BAC$.
2. Niech D będzie punktem na boku BC trójkąta ABC. Wówczas AD jest symedianą w tym trójkącie wtedy i tylko wtedy, gdy $\frac{DB}{DC} = \quad \frac{AB}{AC} \quad ^{2}$.
3. Wszystkie symediany danego trójkąta przecinają się w jednym punkcie zwanym *punktem Lemoine'a*
4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem wpisanym w okrąg o. Wówczas następujące warunki są równoważne:
   (a) AC jest symedianą w trójkącie ABD
   (b) $AB \quad CD = BC \quad DA$
   (c) styczne do okręgu o w punktach B i D przecinają się na prostej AC
5. (*Twierdzenie Pascala*) Jeśli w dowolny sposób ponumerujemy wierzchołki sześciokąta wpisanego w okrąg liczbami 1, 2, 3, 4, 5, 6, to punkty przecięcia par prostych $(1;2) \cap (4;5)$, $(2;3) \cap (5;6)$, $(3;4) \cap (6;1)$ leżą na jednej prostej.

`Zadania:`

1. Udowodnij punkt 3. powyższej teorii.
2. Niech K, L, M będą rzutami prostokątnymi punktu Lemoine'a na boki BC, CA, AB trójkąta ABC odpowiednio. Wykaż, że środkowa CN tego trójkąta jest prostopadla do KL.
3. Dany jest trójkąt ABC w którym $CA = CB$. Punkt P leży wewnątrz ABC, spełniając warunek $\angle CAP = \angle PBA$. Punkt M jest środkiem boku AB. Wykaż, że $\angle APM + \angle BPC = \quad$.
4. Okrąg o_1 przechodzi przez punkty A, B i jest styczny do prostej AC; okrąg o_2 przechodzi przez punkty A, C i jest styczny do prostej AB. Udowodnij, że wspólna cięciwa okręgów o_1, o_2 jest symedianą w trójkącie ABC.
5. Styczne do okręgu o w punktach A i B przecinają się w punkcie P. Cięciwa CD tego okręgu przechodzi przez środek AB. Udowodnij, że $\angle APC = \angle BPD$.
6. Czworokąt $ABCD$ jest wpisany w okrąg, punkt M jest środkiem odcinka AC. Wykaż, że $\angle AMB = \angle AMD$ wtedy i tylko wtedy, gdy BD jest symedianą w ABC.

7. Dany jest trójkąt ABC. Niech X i Y będą takimi punktami, że $\angle CAX + \angle CBY =$ oraz $\angle ACX = \angle BCY = 15$. Udowodnij, że wszystkie proste XY, odpowiadające różnym położeniom punktów X, Y, posiadają punkt wspólny.

8. Punkty P, Q leżą na okręgu opisanym na trójkącie ABC tak, że punkty P, B leżą po przeciwnych stronach prostej CA, a punkty Q, A leżą po przeciwnych stronach CB. Punkty X, Y leżą na bokach CA i CB odpowiednio tak, że $\angle CPX + \angle CQY =$. Udowodnij, że proste XY odpowiadające różnym położeniom punktów X, Y przecinają się w jdnym punkcie.

9. Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o. Okrąg o_1 jest styczny wewnętrznie do okręgu o oraz styczny do boków CA i CB w punktach D i E odpowiednio. Udowodnij, że środek odcinka DE jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.