KółKO MATEMATYCZNE DLA KLAS PIERWSZYCH, 18.02.2010

Twierdzenia i fakty z okręgiem w roli głównej

`Teoria:`

1. Jeśli sześciokąt $ABCDEF$ jest opisany na okręgu, to proste AD, BE i CF przecinają się w jednym punkcie *(twierdzenie Brianchona).*
2. W dowolnym czworokącie $ABCD$ zachodzi nierówność $AB \quad CD + BC \quad DA \geqslant AC \quad BD$, przy czym równość zachodzi wtedy i tylko wtedy gdy na tym czworokącie da się opisać okrąg *(twierdzenie Ptolemeusza).*
3. Dane są punkty A i B oraz liczba rzeczywista dodatnia $\quad \neq 1$. Wówczas zbiór punktów P takich, że $AP \quad BP = \quad$ jest okręgiem o środku leżącym na prostej AB, zwanym *okręgiem Apoloniusza.*
4. Jeśli okrąg wpisany w czworokąt $ABCD$ jest styczny do przeciwległych boków czworokąta w punktach K i L, to proste AC, BD i KL przecinają się w jednym punkcie.
5. Jeśli punkt A leży na biegunowej punktu B względem okręgu o, to punkt B leży na biegunowej A względem tego okręgu *(fakt o wzajemności biegunowych).*

`Zadania:` *5. niekoniecznie związane z twierdzeniami wyżej*

1. Okrąg przechodzący przez punkt A równoległoboku $ABCD$ przecina odcinki AB, AD, AC w punktach odpowiednio P, Q, R. Udowodnić, że $AP \quad AB + AQ \quad AD = AR \quad AC$.
2. Punkty A, B, C, D w tej kolejności na jednej prostej w taki sposób, że $AB = 1$, $BC = 2$ i $CD = 6$. Rozstrzygnąć, czy istnieje punkt P, nieleżący na prostej AB taki, że $\angle APB = \angle BPC = \angle CPD$.
3. Okrąg o środku O jest styczny do boków czworokąta $ABCD$ w punktach kolejno K, L, M, N. Proste KL i MN przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że prosta OS jest prostopadła do prostej BD.
4. Punkty P, Q leżą na równych bokach AB, AC trójkąta równoramiennego ABC w taki sposób, że odcinek PQ jest styczny do okręgu wpisanego w ABC w punkcie Z. Odcinki BQ i CP przecinają się w punkcie X, a prosta AX przecina BC w punkcie Y. Udowodnić, że $\frac{PZ}{PA} + \frac{QZ}{QA} = \frac{AX}{AY}$.
5. Czworokąt $ABCD$ wpisany jest w okrąg o. Udowodnij, że styczne do tego okręgu w punktach B i D przecinają się na prostej AC wtedy i tylko wtedy gdy $AB \quad CD = BC \quad DA$.
6. Okrąg o środku I, wpisany w trójkąt ABC, jest styczny do boków BC i CA w punktach P i Q odpowiednio. Punkt M jest środkiem boku AB. Proste CM i PQ przecinają się w punkcie S. Udowodnij, że IS i AB są prostopadłe.
7. Znajdź zbiór punktów, z których dane dwa rozłączne zewnętrznie okręgi widać pod tym samym kątem.
8. W rombie $ABCD$ o boku 1 wybrano punkt P taki, że $AP \quad PC + BP \quad PD = 1$. Udowodnij, że P leży na przekątnej rombu (którejkolwiek).