KółKO MATEMATYCZNE DLA KLAS PIERWSZYCH, 18.02.2010

Jednokładność i związane z nią fakty

`Teoria:`

1. Jednokładnością o środku w punkcie A i skali (J_A) nazywamy takie przekształcenie płaszczyzny w płaszczyznę, że każdemu punktowi P przyporządkowywany jest punkt P' taki, że $AP' = \quad AP$.
2. Jeśli jednokładność nie jest identycznością, to jej jedynym punktem stałym jest jej środek.
3. Jednokładność przekształca proste na proste równoległe. Jedynymi prostymi stałymi jednokładności są poste przechodzące przez jej środek.
4. Złożenie dwóch jednokładności J_A i J_B jest...
   (a) ... jednokładnością o skali i środku leżącym na prostej AB, dla $\neq 1$
   (b) ... przesunięciem dla $= 1$
5. W dowolnym trójkącie środek okręgu opisanego O, środek ciężkości S i ortocentrum H leżą na jednej prostej zwaną *prostą Eulera*. Dodatkowo $SH = 2SO$.
6. W trójkącia ABC punkt K jest punktem styczności okręgu wpisanego do boku BC. Odcinek KL jest średnicą tego okręgu, a prosta AL przecina bok BC w punkcie N. Wówczas $BK = CN$.
7. Okrąg o_1 jest styczny wewnętrznie do okręgu o w punkcie P. Cięciwa AB okręgu o jest styczna do o_1 w punkcie Q. Wówczas PQ jest dwusieczną kąta APB.

`Zadania:`

1. Dany jest trójkąt ABC. W kąty o wierzchołkach A i B wpisać dwa przystające, styczne zewnętrznie okręgi.
2. Przekątne trapezu przecinają się w punnkcie P, a proste zawierające ramiona tego trapezu przecinają się w punkcie Q. udowodnij, że prosta PQ przechodzi przez środki podstaw trapezu.
3. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$. Wykazać, że środki ciężkości trójkątów ABC, BCD, CDE, DEF, EFA, FAB są wierzchołkami sześciokąta, którego przeciwległe boki są parami równoległe i równe.
4. Okręgi o_1 i o_2 są wpisane w kąt o wierzchołku A. Okrąg o jest styczny zewnętrznie do okręgów w punktach odpowiednio P i Q. Wykaż, że punkty A, P, Q są współliniowe
5. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, i AB w punktach odpowiednio K, L, M. Odcinki KP, LQ, MR są wysokościami w trójkącie KLM. Udowodnij, że proste AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie.

6. Punkt I jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC, stycznego do boku BC w punkcie K. Niech M będzie środkiem boku BC oraz niech L będzie odbiciem symetrycznym K względem M. Udowodnij, że proste IM i AL są równoległe.

7. Okręgi o_1 i o są styczne wewnętrznie w punkcie P. Cięciwa AB okręgu o przecina okrąg o_1 w punktach K i L. Udowodnij, że $\angle APK = \angle BPL$.

8. Rozłączne zewnętrznie okręgi o_1 i o_2 są styczne wewnętrznie do okręgu o w punktach P i Q. Prosta k, która nie rozdziela okręgów o_1 i o_2, jest do nich styczna w punktach A i B odpowiednio. Udowodnij, że proste AP i BQ przecinają się na okręgu o.

9. Dany jest kwadrat $ABCD$ oraz punkty K i L leżące na prostej AB. Kwadrat $KLMN$ leży po tej samej prostej AB, co kwadrat $ABCD$. Udowodnij, że proste AM, DL i BN przecinają się w jednym punkcie.