

KÓŁKO MATEMATYCZNE DLA KLAS PIERWSZYCH, 12.11.2009
Zasada ekstremum (oraz omawianie zaległych zadań)

Teoria:

1. W ograniczonym z góry zbiorze liczb całkowitych znajdziemy element największy.
2. W ograniczonym z dołu zbiorze liczb całkowitych znajdziemy element najmniejszy.
3. Wbrew pozorom, powyższe dwa twierdzenia mają rozliczne zastosowania.

Zadania:

1. Na płaszczyźnie znajduje się n punktów czerwonych i n punktów niebieskich. Udowodnij, że możemy połączyć je w n różnokolorowych par w taki sposób, że żadne dwa odcinki łączące punkty w parze nie przecinają się.
2. (*Problem Sylwestra*) Niech A będzie takim skończonym zbiorem płaszczyzny, że prosta przechodząca przez dowolne dwa punkty z tego zbioru przechodzi przez trzeci punkt z A . Udowodnij, że wszystkie punkty zbioru A są współliniowe.
3. Udowodnij, że nie istnieją liczby całkowite x, y, z, t spełniające równanie $x^2 + y^2 = 3(z^2 + u^2)$.
4. Udowodnij, że nie istnieją liczby całkowite x, y, z, t spełniające równanie $x^4 + 4y^4 = 2z^4 + 8t^4$.
5. Niech A będzie takim zbiorem punktów na płaszczyźnie, że dowolny punkt z A jest środkiem pewnego odcinka o końcach w tym zbiorze.
6. W każde pole nieskończonej szachownicy wpisano liczbę całkowitą nieujemną w taki sposób, że dowolna liczba jest średnią arytmetyczną liczb z nią sąsiadujących. Udowodnij, że wszystkie te liczby są parami równe.
7. Na obrzeżach Błędnego Koła postawione są automaty o kawy. Wiadomo, że zgromadzona w nich sumaryczna ilość kawy umożliwiłaby niewyspanemu prowadzącemu przejście całego koła. Udowodnij, że istnieje automat, z którego zaczynając prowadzący może przejść całe Błędne Koło i nie zasnąć po drodze.
8. W dowolnym pięciokącie wypukłym jesteśmy w stanie wybrać trzy przekątne formujące trójkąt.
9. Udowodnij, że $\sqrt{2}$ jest niewymierny. Byłoby miło, gdybyś skorzystał z opisanej wyżej metody.
10. W szkole urządzono wielki turniej gry w Kamień-Papier-Nożyce Bez Remisów. Między dowolnymi dwoma uczestnikami rozegrany została dokładnie jedna gra. Udowodnij, że istnieje gracz, który wygrał pośrednio lub bezpośrednio ze wszystkimi pozostałymi graczami (przez pośrednią wygraną z graczem X rozumiemy wygraną z pewnym graczem Y , który wygrał z graczem X).