KółKO MATEMATYCZNE DLA KLAS PIERWSZYCH, 19.11.2009

Potęga punktu względem okręgu

`Teoria:`

Dany jest okrąg $o = o(O, r)$ i punkt X leżący gdziekolwiek...

1. *Potęgą punktu* X względem okręgu o nazywamy wartość $|OX|^2$-r^2 i oznaczamy jako $\mathrm{Pot}(X, o)$.
2. Niech k będzie dowolną prostą przechodzącą przez punkt X, przecinającą o w punktach P i Q. Wówczas $XP \quad XQ$=$\mathrm{Pot}(X, o)$. Jeśli k jest styczna do okręgu w punkcie P, zachodzi XP^2=$\mathrm{Pot}(X, o)$.
3. Jeśli na czworokącie $ABCD$ da się opisać okrąg, to $AP \quad PC = BP \quad PD$, gdzie P jest punktem przecięcia przekątnych czworokąta. Podobnie, $AQ \quad QB = CQ*QD$, gdzie Q jest punktem przecięcia się przedłużeń boków AB i CD.
4. Jeśli czworokąt $ABCD$ jest wypukły, prawdziwe jest twierdzenie odwrotne do poprzedniego (dobry warunek opisywalności okręgu na czworokącie).
5. Dany jest trójkąt ABC oraz prosta k przechodząca przez A. Punkt X jest przecięciem prostych BC i k. Wówczas okrąg opisany na trójkącie jest styczny do prostej k wtedy i tylko wtedy, gdy $XA^2 = XB \quad XC$.
6. *Osią potęgową* okręgów o_1, o_2 nazywamy zbiór punktów P: $\mathrm{Pot}(P, o_1)$ =$\mathrm{Pot}(P, o_2)$. Okazuje się, że jest to prosta.
7. Dla dowolnych trzech parami różnych okręgów o_1, o_2, o_3 osie potęgowe par okręgów o_1 i o_2, o_2 i o_3 oraz o_3 i o_1 przecinają się w jednym punkcie, nazywanym *środkiem potęgowym* okręgów o_1, o_2, o_3 lub są równoległe.

`Zadania:`

1. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się punktach D i E. Niech k będzie prostą styczną do okręgu o_1 w punkcie P i do okręgu o_2 w punkcie Q. Udowodnij, że prosta DE połowi odcinek PQ.
2. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się punktach D i E. Punkt A prostej DE leży poza obydwoma okręgami. Prote AP i AQ są styczne do o_1 i o_2 w punktach P i Q odpowiednio. Udowodnij, że $AP = AQ$.
3. Okręgi o_1 i o_2 przecinają się punktach D i E. Punkt A prostej DE leży poza obydwoma okręgami. Proste k i l, przechodzące przez A, przecinają dane okręgi w punktach P, Q, R, S. Udowodnij, że na czworokącie $PQRS$ da się opisać okrąg.
4. Okrąg wpisany w trójkąt ABC jest styczny do boków BC, CA, AB w punktach K, L, M odpowiednio. Proste KL i AB przecinają się w punkcie P. Udowodnij, że $PC^2 = PM^2 + CK^2$.

5. Okrąg o jest styczny do prostej k w punkcie A. Cięciwa BC tego okręgu jest równoległa do prostej k. Punkt P należy do k, a proste PA i PB przecinają o w punktach D i E odpowiednio. Udowodnij, że prosta DE połowi odcinek AP.

6. Okręgi o_1 i o_2 są wzajemnie styczne oraz styczne zewnętrznie do prostej k w punktach A i C. AB jest średnicą o_1. Prosta BD jest styczna do o_2 w punkcie D. Udowodnij, że $BD{=}BA$.

7. Dany jest sześciokąt wypukły $ABCDEF$ w którym $AB = BC$, $CD = DE$ i $EF = FA$. Udowodnij, że proste przechodzące przez punkty A, C, E, prostopadłe do odcinków FB, BD, DF odpowiednio, przecinają się w jednym punkcie.