

1. Udowodnij twierdzenia z kartki z teorią (oprócz postulatu Bertanda i twierdzenia Eulera).
2. Udowodnij, że $NWD(F_n, F_{n+1}) = 1$.
3. Udowodnij, że $n|m \Rightarrow F_n|F_m$.
4. Udowodnij, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $p|a^p - b^p \Rightarrow p^2|a^p - b^p$.
5. Niech p będzie liczbą pierwszą większą od 2. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będą parami różnymi niezerowymi resztami modulo p , analogicznie b_1, b_2, \dots, b_n . Udowodnij, że istnieją $k \neq l$ takie, że $p|(a_k b_k - a_l b_l)$.
6. $NWD(n, 10) = 1$. Wykaż, że istnieje taka liczba $11 \dots 1$, czyli składająca się z samych jedynek, że $n|11 \dots 1$.
7. $7|x^3 + y^3 + z^3$. Udowodnij, że $7|xyz$.
8. Udowodnij, że jeśli $k|a^n - 1$ i $k|a^m - 1$, to $k|a^{NWD(n,m)} - 1$.
9. Udowodnij, że jeśli $d > 0$ jest najmniejszym takim d , że $k|a^d - 1$, to dla każdego e , jeśli $k|a^e - 1$, to $d|e$.
10. Udowodnij, że nie istnieje taki n , że $n|2^n - 1$.
11. Udowodnij, że jeśli dla $k, l \in \mathbb{N}$ liczba $k^2 + l^2$ dzieli się przez 7, to $7|k$ i $7|l$.
12. Udowodnij, że $2222^{5555} + 5555^{2222}$ dzieli się przez 7.
13. Udowodnij, że dla dowolnej liczby naturalnej n i dowolnej liczby naturalnej nieparzystej k suma $1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k$ dzieli się przez $1 + 2 + 3 + \dots + n$.
14. Udowodnij, że dla $k \in \mathbb{N}$ liczba $3^k + 5^k$ nie jest kwadratem liczby naturalnej.
15. Udowodnij, że dla nieparzystej liczby $m > 1$ oraz naturalnej n zachodzi $(m - 1)^{m^n} \equiv -1 \pmod{m^{n+1}}$.
16. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m , że $m|2^m + 1$.
17. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele takich liczb naturalnych m , że $m|2^{2^m} + 1$.
18. Wyznacz resztę z dzielenia przez 7 liczby $10^{10^1} + 10^{10^2} + \dots + 10^{10^{10}}$.
19. Znajdź wszystkie liczby pierwsze p , dla których $11|2^p + 3^p$.
20. Znajdź wszystkie takie liczby pierwsze p , że $4p^2 + 1$ i $6p^2 + 1$ są również liczbami pierwszymi.
21. Udowodnij, że $\frac{a^3+2a}{a^4+3a^2+1}$ jest ułamkiem nieskracalnym.

-
22. Udowodnij, że następujące liczby nieskończonego ciągu są parami różne: $2 + 1, 2^2 + 1, 2^4 + 1, 2^8 + 1, 2^{16} + 1, \dots, 2^{2^n} + 1, \dots$
23. Niech a_1, a_2, \dots, a_n będą różnymi liczbami całkowitymi. Pokaż, że iloczyn wszystkich ułamków formy $\frac{a_k - a_l}{k - l}$ dla wszystkich k, l takich, że $n \geq k > l$, jest liczbą całkowitą.
24. Niech p będzie liczbą pierwszą większą niż 3. Udowodnij, że licznik wyrażenia $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{p-1}$, po skróceniu ułamka, jest podzielny przez p^2 .
25. Niech p będzie liczbą pierwszą większą niż 3. Udowodnij, że licznik wyrażenia $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{(p-1)^2}$, po skróceniu ułamka, jest podzielny przez p .
26. Udowodnij, że jeśli wszystkie współczynniki równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$ są nieparzystymi liczbami całkowitymi, to równanie nie ma rozwiązań w liczbach wymiernych.
27. Udowodnij, że jeśli p i $8p - 1$ są liczbami pierwszymi, to $8p + 1$ jest liczbą złożoną.
28. Udowodnij, że jeśli p i $8p^2 + 1$ są liczbami pierwszymi, to $8p^2 - 1$ jest liczbą pierwszą.
29. Udowodnij, że jeśli dla $n > 2$ jedna z liczb $2^n - 1$ i $2^n + 1$ jest pierwsza, to druga jest złożona.