

Kółko dla starszych 5.11.2009

5.11.2009

1. Wartość wielomianu $R(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ jest całkowitą podzielną przez $m \in \mathbb{N}$ dla $x \in \mathbb{Z}$. Udowodnij, że $n!a_n$ jest podzielne przez m .
2. Pokaż, że dla dodatnich liczb całkowitych a, b liczb $(36a + b)(a + 36b)$ nie może być potęgą dwójki.
3. Znajdź wszystkie pary liczb naturalnych (x, y) , takich że $x^2 + 3y$ i $y^2 + 3x$ są jednocześnie kwadratami liczb całkowitych.
4. Dany jest okrąg k i jego cięciwa AB , nie będąca średnicą. Niech C będzie dowolnym punktem na dłuższym łuku AB okręgu k . Oznaczmy przez K, L odbicia punktów A, B względem prostych odpowiednio BC, AC . Udowodnij, że odległość między środkami odcinków AB i KL nie zależy od wyboru punktu C .