Węgry i USAMO

29.10.2009

1. Udowodnić, że nie istnieją takie liczby całkowite dodatnie x i y, że $x^2 + y + 2$ i $y^2 + 4x$ są kwadratami liczb całkowitych.

2. Joasia i Onufry grają w karty. Talia ma $2n$ kart ponumerowanych liczbami 1,2,...,2n. Karty potasowano i położono w losowej kolejności w rzędzie (liczbami do góry). Joasia zaczyna. Bierze pierwszą lub ostatnią kartę. Następnie Onufry bierze pierwszą lub ostatnią kartę z tych, które pozostaly na stole. I tak dalej, aż do momentu gdy na stole nie pozostanie żadna karta. Zwycięża osoba, która uzbiera większa sume na swoich kartach. Znaleźć taktykę wygrywającą dla Joasi.

3. Znaleźć wszystkie takie funkcje $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, że dla każdego $m, n \in \mathbb{N}_0 : mf(n)+nf(m) = (m+n)f(m^2+n^2)$.

4. Niech $ABCD$ będzie czworokątem i niech E i F będą punktami należącymi do AD i BC odpowiednio, takimi, że: $\frac{AE}{ED} = \frac{BF}{FC}$. Prosta FE przecina proste BA i CD w S i T, odpowiednio. Udowodnić, że okręgi przechodzące przez SAE, SBF, TCF, i TDE przecinają się w jednym punkcie.