Zadania na kółko 22.10.2009

15.10.2009

1. Znajdź wszystkie n takie, że $n! + 5$ jest sześcianem liczby całkowitej.

2. Znajdź największą możliwą liczbę dowodów nierówności: dla $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ zachodzi: $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$

3. Udowodnij, że jeśli $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \{n : n \in \mathbb{N}, M^2 < n < (M+1)^2\}$ dla $M \in \mathbb{N}$, wtedy $a_1a_2 = b_1b_2$ tylko jeśli $\{a_1, a_2\} = \{b_1, b_2\}$.

4. Dany jest graf o n wierzchołkach. Udowodnij, że jeśli dla każdych dwóch wierzchołków niepołączonych krawędzią suma ich stopni jest większa niż n, wtedy w grafie istnieje cykl Hamiltona.

5. Każdy nauczyciel w Staszicu nienawidzi najwyżej trzech innych nauczycieli (nienawiść jest symetryczna - jeśli pani X nienawidzi pani Y to pani Y nienawidzi pani X). Udowodnij, że można ich podzielić na dwie grupy, tak że każdy nauczyciel nienawidzi najwyżej jednego nauczyciela ze swojej grupy.

6. Wypukły czworokąt ABCD jest opisany na okręgu o środku S, jest on również wpisany w okrąg. Prosta równoległa do AB, przechodząca przez S przecina AD w punkcie P i BC w punkcie Q, prosta równoległa do BC, przechodząca przez S przecina AB w punkcie K i CD w punkcie L. Wykazać, że PQ=KL.