Ceva i Menelaos

18.02.2009

1. Udowodnić twierdzenie Van Aubela: Jeśli punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC tak, że proste AP, BQ, CR przecinają się w punkcie S, to zachodzi równość:

$$\frac{AS}{SP} = \frac{AQ}{QC} + \frac{AR}{RB}.$$

2. Udowodnić trygonometryczną wersję twierdzenia Cevy: Jeśli punkty P, Q, R leżą odpowiednio na bokach BC, CA, AB trójkąta ABC, to proste AP, BQ, CR przecinają się w jednym punkcie wtedy i tylko wtedy, gdy zachodzi równość:

$$\frac{\sin\angle BAP}{\sin\angle PAC} \cdot \frac{\sin\angle ACR}{\sin\angle RCB} \cdot \frac{\sin\angle CBQ}{\sin\angle QBA} = 1.$$

3. Pokazać, że symediany w trójkącie ABC przecinają się w jednym punkcie (symediana poprowadzona z wierzchołka A jest odbiciem środkowej względem dwusiecznej poprowadzonych z wierzchołka A).

4. W trójkącie ABC proste AK i BL są dwusiecznymi kątów wewnętrznych przy wierzchołkach odpowiednio A i B, natomiast prosta CM jest dwusieczną kąta zewnętrznego przy wierzchołku C ($M \in AB$). Pokazać, że K, L, M są współliniowe.

5. Na zewnątrz trójkąta ostrokątnego ABC zbudowano takie podobne trójkąty równoramienne ABR, BCP i CAQ, że $AR = RB$, $BP = PC$ oraz $CQ = QA$. Pokazać, że proste AP, BQ i CR przecinają się w jednym punkcie.

6. Z wierzchołka C kąta prostego trójkąta ABC poprowadzono wysokość CK, a w trójkącie CKA poprowadzono dwusieczną CE. Prosta przechodząca przez punkt B równoległa do CE przecina prostą CK w punkcie F. Udowodnić, że prosta EF dzieli odcinek AC na połowy.