zadania różne

10.02.2009

1. Na płaszczyźnie mamy N białych i N czarnych punktów. Żadne trzy sposród tych $2N$ punktów nie są współliniowe. Udowodnić, że można te punkty połączyć N nieprzecinającymi się odcinkami, tak, aby każdy odcinek łaczył biały punkt z czarnym.

2. Wyznaczyć wszystkie dodatnie liczby naturalne n, dla których:
$$n^n + 1 \text{ oraz } (2n)^{2n} + 1$$
są liczbami pierwszymi.

3. Dany jest trójkąt prostokątny ABC. Okrąg o środku na przeciwprostokątnej AB przechodzi przez wierzchołek A i przecina przyprostokątną BC w punktach M i N, Niech K będzie punktem symetrycznym do M względem prostej AB. Wykaż, że:
$$KN = MC + CN$$

4. Niech a, b, c to dodatnie liczby rzeczywiste. Udowodnić, że:
$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} \geqslant 4(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b})$$

5. Kwadrat o boku długości n dzielimy na n^2 kwadratów jednostkowych. Wyznaczyć wszystkiie liczby naturalne n, dla których taki kwadrat można podzielić wzdłuż lini tego podziału na kwadraty, z których każy ma krawędz długości 2 lub 3.

6. Do boku CA trójkąta ABC należy taki punkt D, że $AB = CD$ oraz spełniony jest warunek $\angle ACB = \angle ABD$. Dwusieczna kąta CAB przecina bok BC w punkcie E. Udowodnić, że odcinki AB i DE są równoległe.

7. Dla dowolnych liczb rzeczywistych dodatnich udowodnić nierówność:
$$\sqrt{x^2+1} + \sqrt{y^2+1} + \sqrt{z^2+1} \geqslant \sqrt{6(x+y+z)}$$

8. Niech $f(x) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Oblicz sumę:
$$f(\frac{1}{1996}) + f(\frac{2}{1996}) + ... + f(\frac{1995}{1996})$$

9. Dane są liczby nieujemne $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ o sumie równej 1. Wyznaczyć maksymalną wartość wyrażenia:
$$a_1a_2a_3 + a_2a_3a_4 + a_3a_4a_5 + a_4a_5a_6 + a_5a_6a_1 + a_6a_1a_2$$