16.12.2008

1. W trójkacie ostrokatnym ABC punkt O jest srodkiem okręgu opisanego, zas punkt H jest punktem przecięcia wysokosci. Prosta AH przecina okrag opisany na trójkacie ABC w punkcie K różnym od A. Proste OK i BC przecinaja się w punkcie P. Punkt Q jest symetryczny do punktu P względem srodka odcinka OH. Proste AQ i BC przecinaja się w punkcie R. Dowiesć, że $BP = CR$

2. Dany jest trójkat ABC. Okrag o srodku w J, dopisany do trójkata ABC , jest styczny do odcinka AB w punkcie D. Prosta przechodzaca przez punkt D i prostopadła do prostej CD przecina proste AJ i BJ odpowiednio w punktach P i Q. Dowiesć, że: $DP = DQ$

3. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb naturalnych n, takich że $\binom{n}{2}$ jest kwadratem liczby naturalnej.

4. Udowodnij, że w ciagu liczb $a_1, a_2, \cdots, a_{nm+1}$ istnieje n-elementowy podciag rosnacy (ciag $a_{i_1} < a_{i_2} < ... < a_{i_n}$taki, że $i_1 < i_2 < ... < i_n$) lub m-elementowy podciag malejacy.

5. Wyznaczyć wszystkie zbiory skończone S na płaszczyznie, złożone z co najmniej trzech punktów i spełniajace następujacy warunek: dla każdych dwóch różnych punktów A i B zbioru S symetralna odcinka AB jest osia symetrii zbioru S.

6. Wielomian o współczynnikach całkowitych przyjmuje wartosć 2006 dla trzech różnych argumentów całkowitych. Udowodnić, że nie przyjmuje on wartosci 2025 dla dwóch różnych argumentów całkowitych.

7. Niech a, b, c, d będa dodatnimi liczbami rzeczywistymi spełniajacymi: $abcd = 1$, Pokazać, że:
$$\frac{1}{(1+a)^2} + \frac{1}{(1+b)^2} + \frac{1}{(1+c)^2} + \frac{1}{(1+d)^2} \geqslant 1$$