13.01.2009

1. Udowodnij, że w każdym podzbiorze $n + 1$ - elementowym zbioru $1, 2, ..., 2n$ istnieja dwie takie liczby, że jedna dzieli druga.

2. Na bokach BC, CA, AB trójkata ABC zbudowano, po jego zewnetrznej stronie, trójkaty BCD, CAE ABF takie, ze

$$\angle CAE = \angle FAB, \angle FBA = \angle DBC, \angle DCB = \angle ECA$$

Dowiesc, ze proste AD BE CF przecinaja sie w jednym punkcie.

3. Niech $n \in \mathbb{N}_+$. Udowodnij, że istnieje nieskończenie wiele liczb $k \in \mathbb{N}_+$, takich że: $n|1^n + 2^n + \cdots + k^n$

4. Niech a, b, c to takie liczby rzeczywiste dodatnie, że: $abc = 1$. Udowodnić:

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(c+a)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}$$

5. Wykaz, ze jesli x_1, y_1 jest rozwiazaniem rownania Pella $x^2 - dy^2 = 1$ ($d \in \mathbb{N}$, d- liczba bezkwadratowa), to ciag par x_n, y_n, okreslony nastepujaco:

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n, n = 1, 2, \ldots$$

spelnia to rownanie.

6. Udowodnij, że dla dowolnych liczb naturalnych m i n liczba:

$$\frac{((mn)!)^2}{(m!)^{n+1}(n!)^{m+1}}$$

jest całkowita.

7. W trójkacie ABC dwusieczna kata ACB przecina bok AB w punkcie D. Symetralna odcinka CD przecina prosta AB w punkcie E. Wykazać, że:

$$\frac{EA}{EB} = \frac{AC^2}{BC^2}$$