Różności

wtorek, 4 listopada 2008

1. Na bokach BC i AC trójkąta ABC wybrano odpowiednio punkty D i E. Punkt F jest punktem przecięcia odcinka DE i dwusiecznej kąta przy wierzchołku C. Dowieść, że jeśli BD=DF oraz AE=EF, to punkt F jest środkiem okręgu wpisanego w trójkąt ABC.

2. Znajdź wszystkie dodatnie liczby a i b, takie że: $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ i $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ są obie całkowite.

3. Czworokąt wypukły ABCD podzielono na dziewięć czworokątów wypukłych, jak pokazano na rysunku. Wykazać, że jeśli w zacieniowane czworokąty można wpisać okręgi to proste AX,BY,CZ,DT przecinają się w jednym punkcie.

4. Dany jest czworościan ABCD. Niech O będzie środkiem okręgu opisanego na ABC. Sfera o środku w O i przechodząca przez A,B,C przecina krawędzie DA,DB,DC po raz drugi w punktach odpowiednio A',B',C'. Udowodnić, że płaszczyzny styczne do tej sfery w punktach A',B',C' przechodzą przez środki sfery opisanej na DA'B'C'.

5. $a, b, c \in \mathbb{R}^+$. Pokaż, że: $\sqrt{\frac{a^3}{a+b}} + \sqrt{\frac{b^3}{b+c}} + \sqrt{\frac{c^3}{c+a}} \geqslant \frac{a+b+c}{\sqrt{2}}$

6. Dane naturalne n. Dany jest dzielnik d. n ma k dzielników nie przekraczających d. Czy wystarczy sprawdzić podzelność d przez pierwsze $\lceil k/2 \rceil$ dzielników n, żeby przekonać się czy d jest pierwsze?

7. Na stole znajdują się 2003 ciastka. Dwóch graczy wykonuje ruchy jeden po drugim. Ruch polega na zjedzeniu jednego ciastka lub połowy ciastek znajdujących się na stole (podłoga z połowy). Co najmniej jedno ciastko musi zostać zjedzone w jednym ruchu. Przegrywa ten kto zje ostatnie ciastko. Kto ma strategię wygrywającą?

8. Niech $n \geqslant 2$ i $d \geqslant 1$ będą takimi liczbami całkowitymi, że $d|n$ i niech $x_1, x_2, \cdots, x_n$ będą takimi liczbami rzeczywistymi, że $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$. Dowieść, ze istnieje co najmniej $\binom{n-1}{d-1}$ możliwości wyboru d indeksów $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_d \leqslant n$, takich, że $x_{i_1} + x_{i_2} + \cdots + x_{i_d} \geqslant 0$